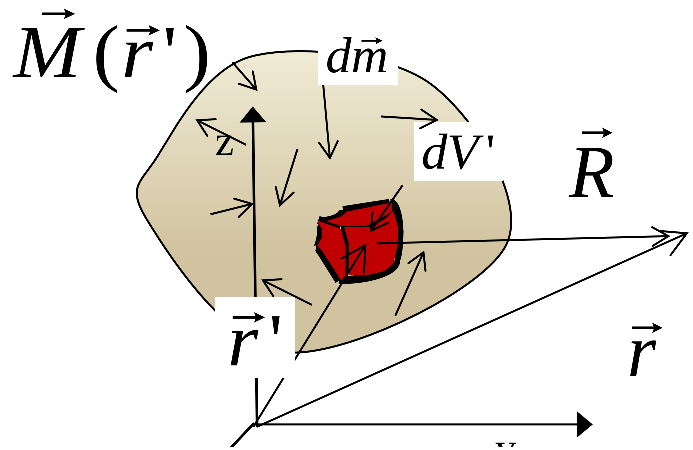
Tema 6: DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR DEL POTENCIAL VECTOR

6.1. Introducció
6.2. El dipol magnètic
6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector
6.4. Distribucions de dipols magnètics

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.4. Distribucions de dipols magnètics

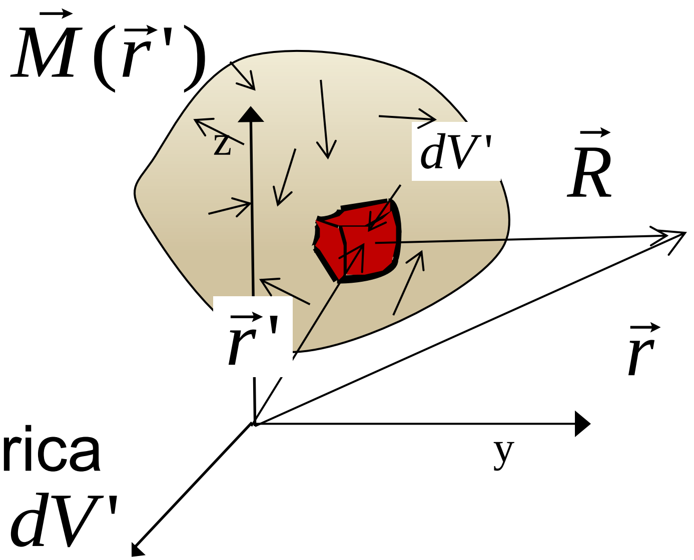


El vector imantació

- Abordarem la representació dels materials magnètics de forma similar als elèctrics.
- Simularem un material magnètic per un conjunt de dipols magnètics dm (espires microscòpiques).
- Si ara suposem que formen una distribució contínua...
- ... podem definir una densitat de moment dipolar magnètic $M(r')$ i obtenir l'element dipolar com: $d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}\,')dV'$
- Aqueixa densitat de moment dipolar s'anomena VECTOR MAGNETITZACIÓ o IMANTACIÓ.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.4. Distribucions de dipols magnètics



El vector imantació

- La densitat de moment dipolar o vector imantació ***M:***

  − és un vector

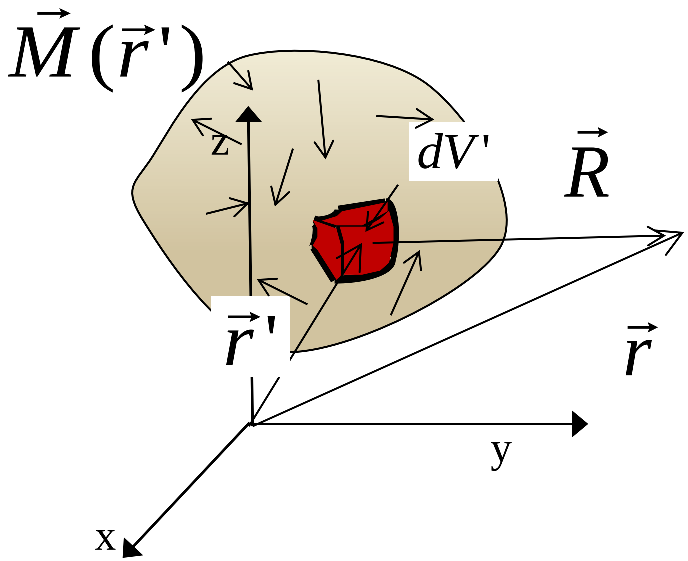
  − representa una densitat volumètrica de moment dipolar magnètic $d\vec{m}/dV'$

  − unitats: A·m^2/m^3 = A/m

- Utilitat: representació de la <u>matèria en general</u>, considerant els corrents microscòpics i els corresponents moments magnètics dipolars.
- En el cas de <u>materials magnètics</u>, els moments dipolars microscòpics són importants i poden orientar-se.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.4. Distribucions de dipols magnètics



Potencial d'una distribució de dipols

- Suposem un cos descrit per la seua densitat de dipols elèctrics:

$$\vec{M}(\vec{r}\,')$$

- El potencial creat per un dipol elemental, fora de l'origen, serà:

$$d\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

- Per a tot el conjunt del material:

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

- Introduint el vector ***M***:

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\times\vec{R}}{R^3}dV'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

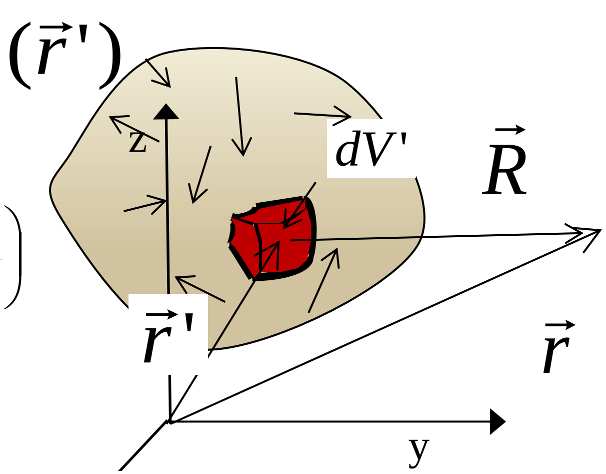
6.4. Distribucions de dipols magnètics

CORRENTS EQUIVALENTS D'IMANTACIÓ

Tema 6: DESENVOL. MUL

6.4. Distribucions de dipols magnètics

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)$$



Potencial d'una distribució de dipols

- Operant:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV' = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) dV'$$

desenvolupant:

$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) = \vec{\nabla}\psi \times \vec{a} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

$$\vec{\nabla}' \times \left(\frac{1}{R}\vec{M}\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) \times \vec{M} + \frac{1}{R}\left(\vec{\nabla}' \times \vec{M}\right)$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{M}}{R}\right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV'$$

Generalització del t. divergència >> (formulari)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'(V')} \frac{\vec{M}}{R} \times d\vec{S}\,' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{R} dV'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

$$|\vec{u}| = 1$$

***u**: mòdul i direcció arbitraris, però constants*

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$

Potencial d'una distribució de dipols

- Demostració de la primera integral (generalització del t. divergència): $$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV = \int_{S(V)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$
- Definim $\vec{B} = \vec{A}\times\vec{u}$, aleshores: $$\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{u}\right)dV = \int_{S(V)} \left(\vec{A}\times\vec{u}\right)\cdot d\vec{S}$$

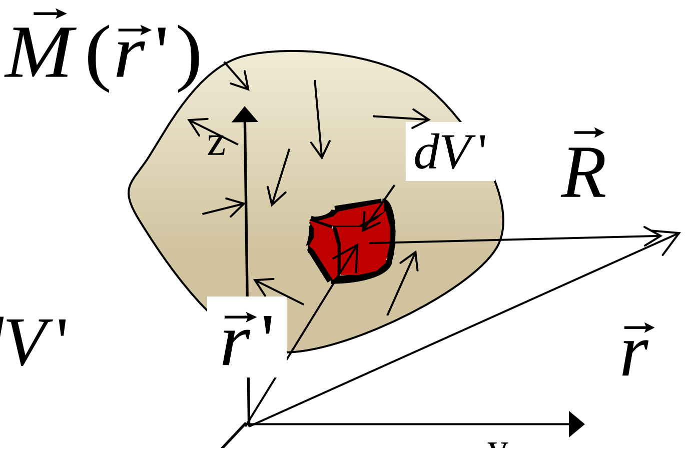
  però com que:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{u}\right) = \vec{u}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + \vec{A}\cdot\cancel{\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)} \\ \left(\vec{A}\times\vec{u}\right)\cdot d\vec{S} = \left(d\vec{S}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{u} \end{cases}$$
- Aleshores:

$$\int_V \vec{u}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)dV = \int_{S(V)} \left(d\vec{S}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{u}$$

$$\vec{u}\cdot\int_V \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)dV = \vec{u}\cdot\int_{S(V)} \left(d\vec{S}\times\vec{A}\right) \;\Rightarrow\; \int_V \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)dV = -\int_{S(V)} \left(\vec{A}\times d\vec{S}\right)$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.4. Distribucions de dipols magnètics



Potencial d'una distribució de dipols

- Per tant:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{M}\times\vec{n}}{R}dS' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}}{R}dV'$$

- Expressió que correspon al càlcul del potencial vector creat per una distribució de corrent superficial i una altra de volum.

- Identificant, podem definir:

$$\vec{K}_m = \vec{M}\times\vec{n} \qquad \vec{J}_m = \vec{\nabla}'\times\vec{M}$$

- Finalment: $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{K}_m}{R}dS' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}_m}{R}dV'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.4. Distribucions de dipols magnètics

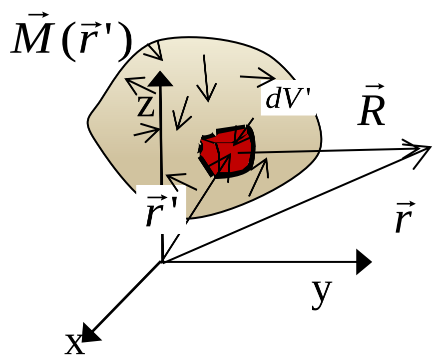
Corrents equivalents d'imantació

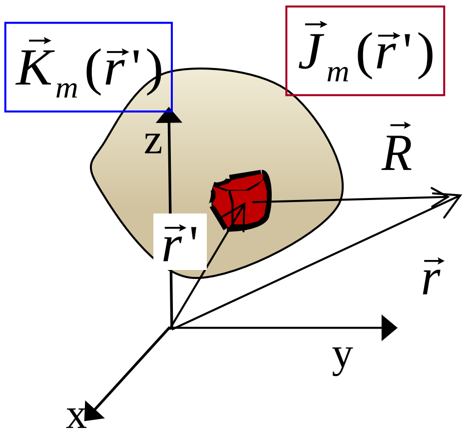
- Un cos amb un vector d'imantació (imantat) es pot representar per dues densitats de corrent:
  - densitat superficial de corrent: $\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n}$
  - densitat volumètrica de corrent: $\vec{J}_m = \vec{\nabla}' \times \vec{M}$
- La suma dels corrents equivalents d'imantació és zero.
- L'efecte de les densitats de corrent és vàlid en punts interiors i exteriors.
- K_m i J_m permeten calcular el potencial vector de forma exacta, si suposem que el material ve descrit només per la imantació ***M*** (no és un terme del desenvolupament).

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

Corrents equivalents d'imantació





- Comprovació de suma de corrents equivalents:

$$\int_{S'} \vec{K}_m dS' + \int_{V'} \vec{J}_m dV' = \int_{S'} \vec{M} \times \vec{n}\, dS' + \int_{V'} \vec{\nabla}' \times \vec{M}\, dV' =$$

$$= \int_{S'} \vec{M} \times d\vec{S}' + \int_{S'} -\vec{M} \times d\vec{S}' = 0$$

6.4. Distribucions de dipols magnètics

EL POTENCIAL MAGNÈTIC ESCALAR

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

El potencial escalar magnètic

- El potencial vector magnètic ***A*** és complicat de calcular perquè és un vector. Seria convenient trobar un potencial escalar magnètic, similar a l'elèctric, tal que:

$$\vec{B} \approx \vec{\nabla}\phi_m$$

- En general, açò no és possible, ja que es planteja una contradicció:
  - el rotor d'un gradient és sempre zero
  - la llei d'Ampere: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$

Motius històrics

- Ara bé, en regions on *J = 0*, es complirà que $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$ i podrem considerar que, per similitud amb *E*: $\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\phi_m$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

El potencial escalar magnètic

- En el cas en que la divergència de *B* siga zero, podem calcular Φ_m considerant que:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= -\mu_0\nabla^2\phi_m \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \nabla^2\phi_m = 0$$

− el potencial escalar magnètic compleix l'eq. de Laplace;

− per tant, sempre que J = 0, podrem utilitzar els mètodes de resolució habituals, com el de factoritzar la funció.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

El potencial escalar magnètic D'UN DIPOL MAGNÈTIC

- En el cas d'un dipol elèctric, teníem que:

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

- En el cas d'un **dipol magnètic**, tenim que:

$$\phi_m(\vec{r}) = ? \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

- Com en l'exterior d'un dipol magnètic $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$ (no hi ha fonts), comparant equacions, podem dir que:

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

No hi és μ_0

Unitats: A· m²/ m² = A

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

El potencial escalar magnètic D'UN DIPOL MAGNÈTIC

- El camp magnètic, calculat a partir del potencial vector:

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_m(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}\right)$$

- El camp magnètic, calculat a partir del potencial escalar:

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = -\mu_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3}\right)$$

- Comprovem la compatibilitat entre ambdues equacions.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

El potencial escalar magnètic D'UN DIPOL MAGNÈTIC

- COMPROVACIÓ:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

- A partir de A_m (vegeu apartats anteriors):

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}\right)=\left[\underbrace{\vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right)}_{=\vec{m}4\pi\delta(\vec{R})=0}-\frac{\vec{R}}{R^3}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{m}\right)+\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{m}-\left(\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}\right]$$

ja que ∇·m = 0

- A partir de ϕ_m:

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}+\vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})+\vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3}\right)=\left(\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}+\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{m}+\vec{m}\times\left(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{R}}{R^3}\right)+\frac{\vec{R}}{R^3}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{m}\right)$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

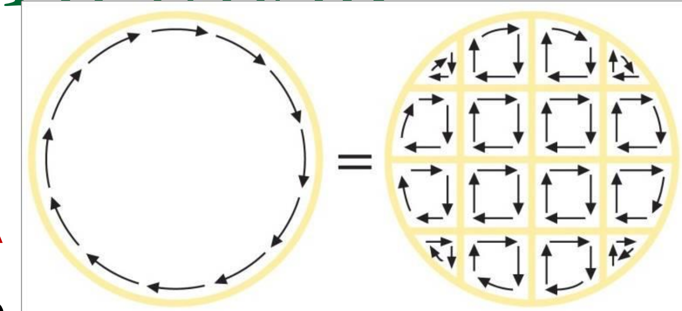


Fig. 27.33, Tipler 5ª Ed.

El potencial escalar magnètic ESPIRA

- **Per a una espira**, considerant que un corrent per una espira és equivalent a una distribució superficial de corrents elementals...

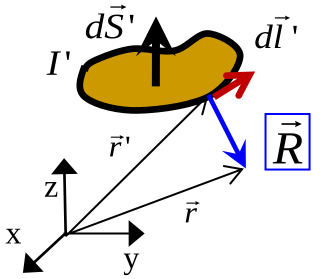
- Si cada espira elemental: $d\vec{m} = Id\vec{S}$

- Aleshores podem calcular el potencial escalar com: $\phi_m = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{d\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{Id\vec{S}\cdot\vec{R}}{R^3}$

  − en funció de l'angle sòlid Ω subtendit per l'espira en el punt camp (*R* va des de l'espira cap al punt camp)

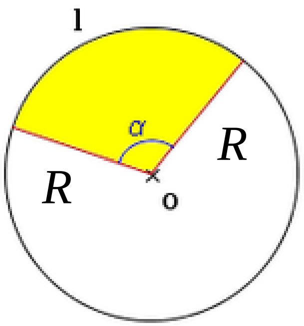
$$\phi_m = -\frac{I\Omega}{4\pi}$$

$$\phi_m = \frac{I}{2}(1-\cos\theta)$$



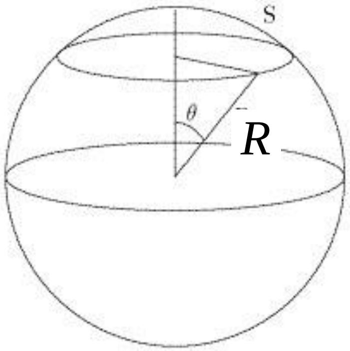
Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics



Recordatori d'angle sòlid

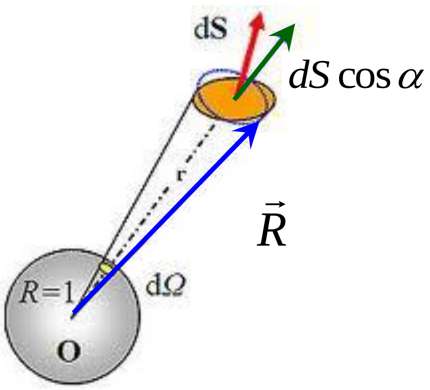
- En el pla: $\alpha = \dfrac{l}{R} \qquad \alpha_{\max} = \dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi$



- En l'espai: $\Omega = \dfrac{S}{R^2} \qquad \Omega_{\max} = \dfrac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$

  (~ con) $\Omega_{semiangle\theta} = 2\pi(1-\cos\theta)$

- Angle sòlid subtendit per una superfície qualsevol des d'un punt *O*:



$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{R^2} = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{u}_R}{R^2} \qquad \Omega = \int \frac{d\vec{S}\cdot\vec{R}}{R^3}$$

> *R* va des del punt *O* a la superfície

http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81ngulo_s%C3%B3lido

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

El potencial escalar magnètic MATERIAL MAGNETITZAT

- **Per a un vector d'imantació *M***, considerant l'element de moment dipolar i que el càlcul es fa en punts externs a *V'*:

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \frac{d\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R^3}\,dV'$$

- Operant: $\vec{\nabla}\cdot(\psi\,\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi + \psi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ $\quad \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{M}}{R}\right) = \vec{M}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}$

  (+ teorema de la divergència)

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R^3}\,dV' = \ldots = -\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}}{R}\,dV' + \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{M}\cdot\vec{n}}{R}\,dS'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

El potencial escalar magnètic: càrregues equivalents

- Considerant que els termes són similars al càlcul del potencial elèctric creat per distribucions de càrrega

$$\phi_m = -\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{M}\cdot\vec{n}}{R}dS'$$

- Definim les següents densitats equivalents de càrrega magnètica:
  - densitat de càrrega magnètica de volum: $\rho_m = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$
  - densitat de càrrega magnètica de superfície: $\sigma_m = \vec{M}\cdot\vec{n}$

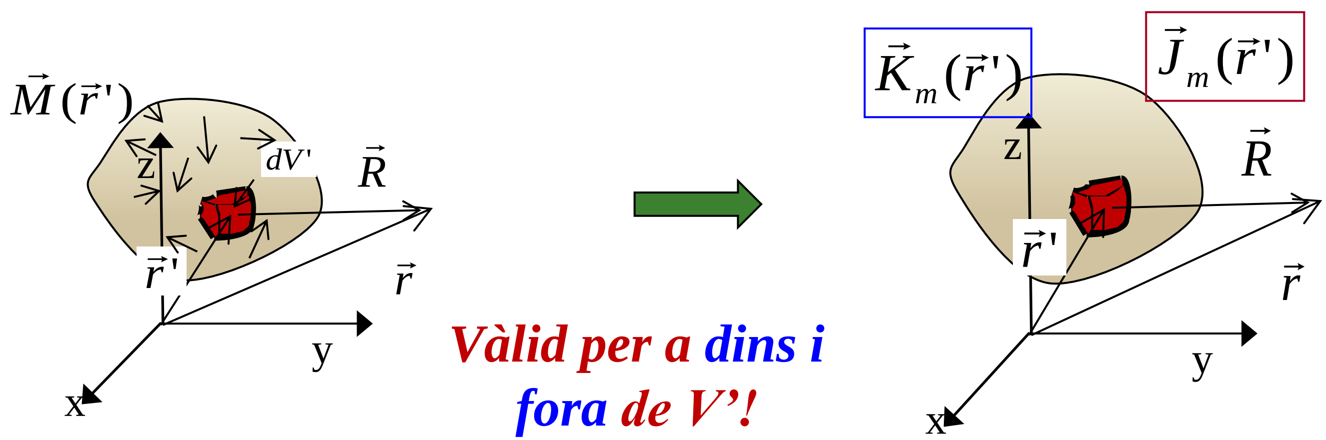
- De tal manera que: $$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\rho_m}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\sigma_m}{R}dS'$$

6.4. Distribucions de dipols magnètics

Corrents i càrregues equivalents d'imantació

- En definitiva, un material imantat (amb una densitat d'imantació ***M***), es pot representar:

  > Bé per **densitats de corrent** equivalents:



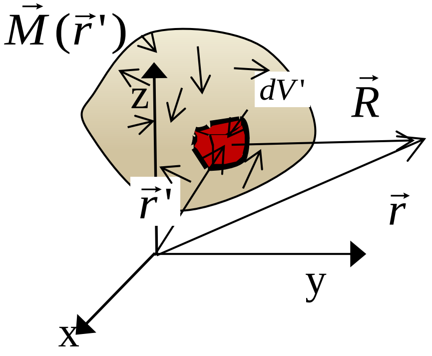
Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

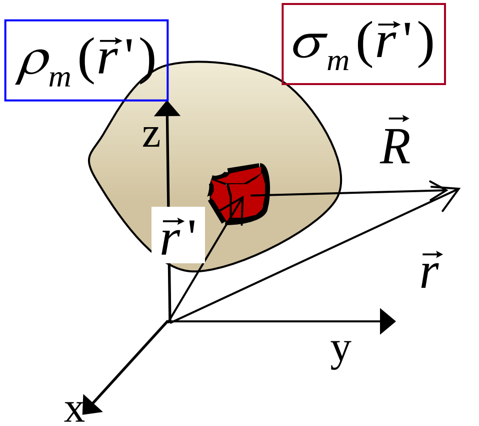
Corrents i càrregues equivalents d'imantació

- En definitiva, un material imantat (amb una densitat d'imantació ***M***), es pot representar:

  > Bé per **densitats de càrrega** magnètica equivalents:



Vàlid només per a FORA de V'!



Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

Aplicacions del potencial escalar magnètic

- El potencial escalar magnètic va ser presentat per Gauss per descriure el camp magnètic terrestre.
- Avui en dia s'utilitza aqueixa descripció i es considera la solució en funció dels harmònics esfèrics.
- La solució en harmònics esfèrics permet determinar el camp magnètic terrestre en qualsevol punt de l'atmosfera amb una gran precisió, aspecte necessari per al càlcul de l'òrbita en els satèl·lits de comunicacions. Les diferents agències espacials utilitzen el potencial escalar magnètic.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.4. Distribucions de dipols magnètics

Aplicacions del potencial escalar magnètic

- En concret, l'Agència Espacial Europea (ESA) en té un document referent (vegeu carpeta RECURSOS)
- Es tracta d'un document on vénen descrits diferents estàndards necessaris per a l'enginyeria de l'espai. En el capítol 5 hi ha la part relativa al camp geomagnètic de la Terra, incloent-hi el seu desenvolupament multipolar. Us recomane vehementment que li feu una ullada; és molt interessant.