Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

Fig. 23.00 Tipler 5a ed.

2.1 Introducció
2.2 Llei de Coulomb
2.3 Camp elèctric. Divergència i rotor del camp electrostàtic
2.4 Teorema de Gauss
2.5 El potencial electrostàtic

M. Carmen Martínez Tomás

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

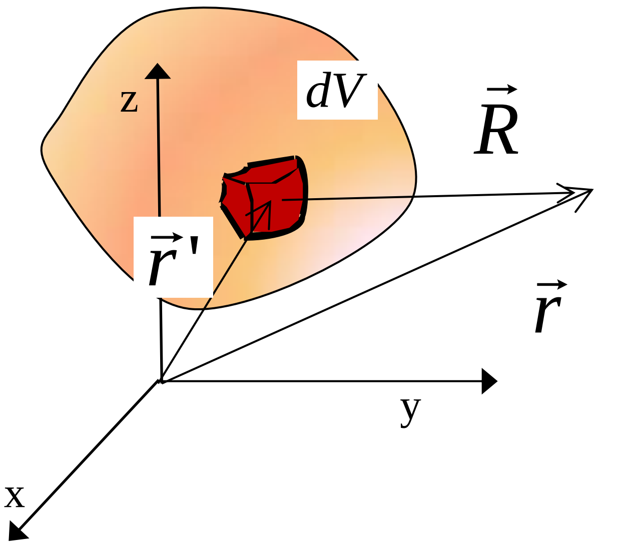
2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

PROPIETATS VECTORIALS DEL CAMP ELÈCTRIC:

DIVERGÈNCIA

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor



DIVERGÈNCIA

- Partim del camp creat per ρ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV'$$

Si ρ = 0 fora de V', la integral es pot ampliar a tot l'espai.

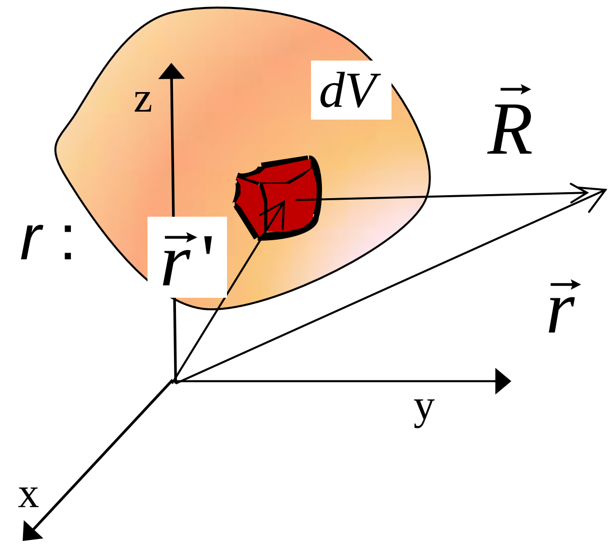
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV'$$

- Si calculem la divergència de *E*, derivant respecte de *r* :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV'\right)$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor



DIVERGÈNCIA

- Com que estem derivant respecte de *r* :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\rho(\vec{r}\,')dV'$$

- Recordant que:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

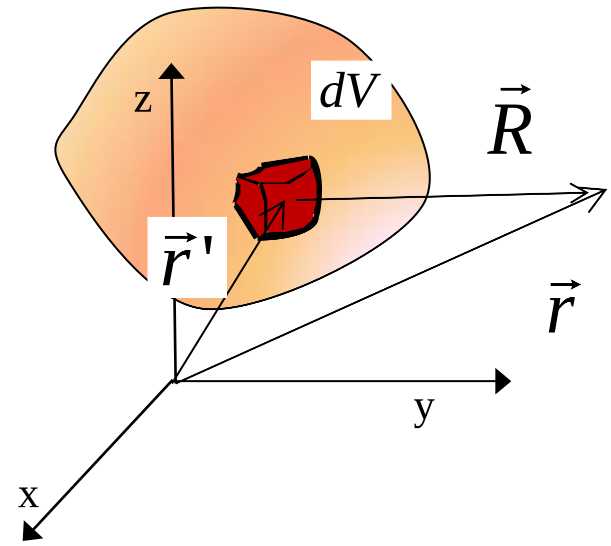
- Obtenim:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}4\pi\delta(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')dV' = \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor



DIVERGÈNCIA

- ATENCIÓ: la densitat *ρ(r)* és la funció que dóna la densitat de càrrega en tot l'espai, és a dir:

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}) \neq 0 & \vec{r} \in V'(\vec{r} = \vec{r}\,') \\ \rho(\vec{r}) = 0 & \vec{r} \notin V'(\vec{r} \neq \vec{r}\,') \end{cases}$$

- Per tant:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} & \vec{r} \in V' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 & \vec{r} \notin V' \end{cases}$$

1ª equació diferencial del camp electrostàtic

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

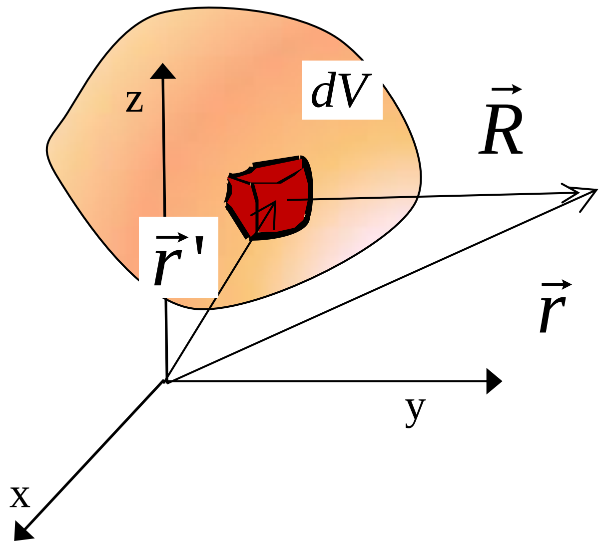
2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

PROPIETATS VECTORIALS DEL CAMP ELÈCTRIC:

ROTACIONAL

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor



ROTACIONAL

- Partim del camp creat per ρ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV'$$

Si ρ = 0 fora de V', la integral es pot ampliar a tot l'espai.

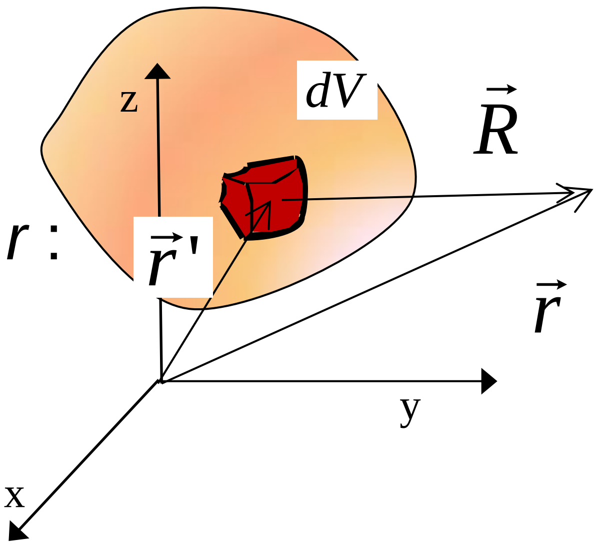
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV'$$

- Calculem el rotacional de *E*, derivant respecte de *r* :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV'\right)$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor



ROTACIONAL

- Com que estem derivant respecte de *r* :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Re^3}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\rho(\vec{r}\,')dV'$$

- Recordant que:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)=0$$

- Obtenim:

$$\rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=0$$

2ª equació diferencial del camp electrostàtic

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

DIVERGÈNCIA I ROTACIONAL

- Per tant, hem obtingut la divergència i el rotacional de E:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} & \text{(fora de } V'\text{, } \nabla\cdot E=0 \text{ ja que } \rho(r)=0) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = 0 & \text{(en tot l'espai)} \end{array} \right.$$

- Quina informació física ens proporcionen?

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Informació que s'obté a partir de la divergència i rotacional

- Les 2 equacions que donen la divergència i el rotor contenen molta informació del camp electrostàtic.

- Estructura de les línies de força del camp:

➢ Com que la divergència ≠ zero: fonts (+q, ρ_+) i embornals (–q, ρ_-).

➢ Com que el rotor és zero (irrotacional): mai no es tanquen.

➢ LES LÍNIES DE CAMP SEMPRE ENTREN/IXEN A/D'ALGUNA FONT; NO SÓN MAI TANCADES.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Informació que s'obté a partir de la divergència i rotacional

- Les 2 equacions que donen la divergència i el rotor contenen molta informació del camp electrostàtic.

- Estructura en r :

➢ <u>Com que</u> $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, E té dependència amb r^{-2}

(si depenguera de r^{-1}, r^{-3}, r^{-4}, no seria així)

➢ <u>Com que el rotor és zero (irrotacional)</u>: camp conservatiu.

- LES 2 EQUACIONS CONTENEN TOTA LA INFORMACIÓ DE L'ELECTROSTÀTICA.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Un **teorema** és una afirmació que pot ser demostrada dins d'un sistema formal matemàtic

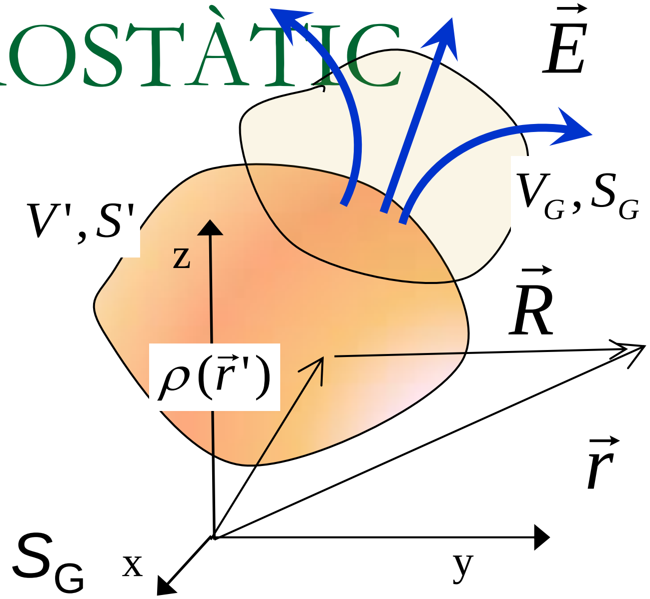
DEL TEOREMA DE GAUSS (matemàtic)

A LA LLEI DE GAUSS (física)

Una **llei** és una proposició científica que descriu una relació experimental entre diferents variables

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss



Cas general (superfície arbitrària)

- Suposem una densitat de càrrega que crea un camp elèctric E.
- Suposem una superfície qualsevol S_G i el volum tancat al seu interior V_G .
- Flux del camp *E* a través de S_G ?: $\int_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = ?$
- Aplicant el teorema de la divergència:

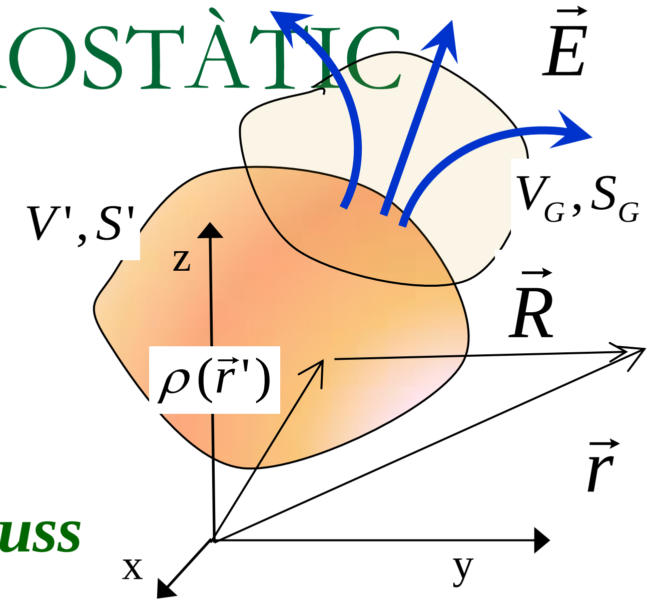
$$\int_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{V_G} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \int_{V_G} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\, dV =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_G} \rho(\vec{r})\, dV = \frac{q_{tancada}(S_G)}{\varepsilon_0}$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

Dins de S_G



Cas general (superfície arbitrària)

- L'equació:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0}$$

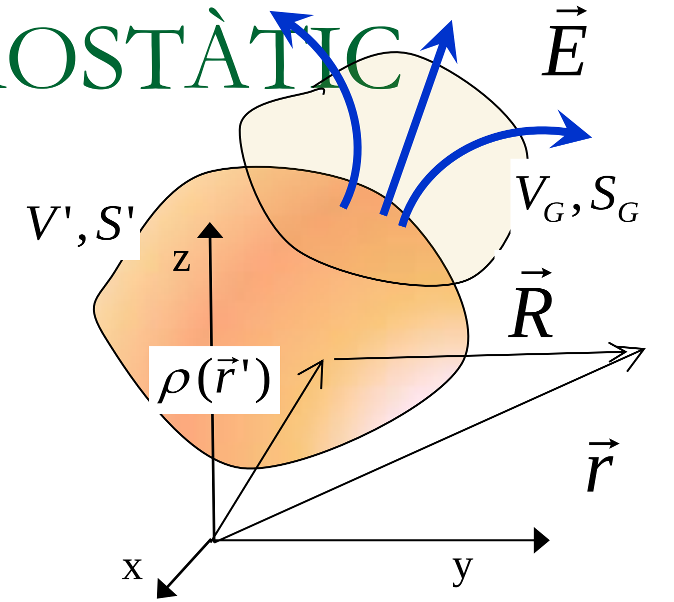
Llei de Gauss

- La llei de Gauss sempre es pot aplicar, però no sempre la integral és fàcil d'obtenir.

- Quan la integral és fàcil de calcular, les dues principals aplicacions de la llei de Gauss són:
  - > Càlcul del flux del camp elèctric
  - > Càlcul dels components del camp elèctric

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss



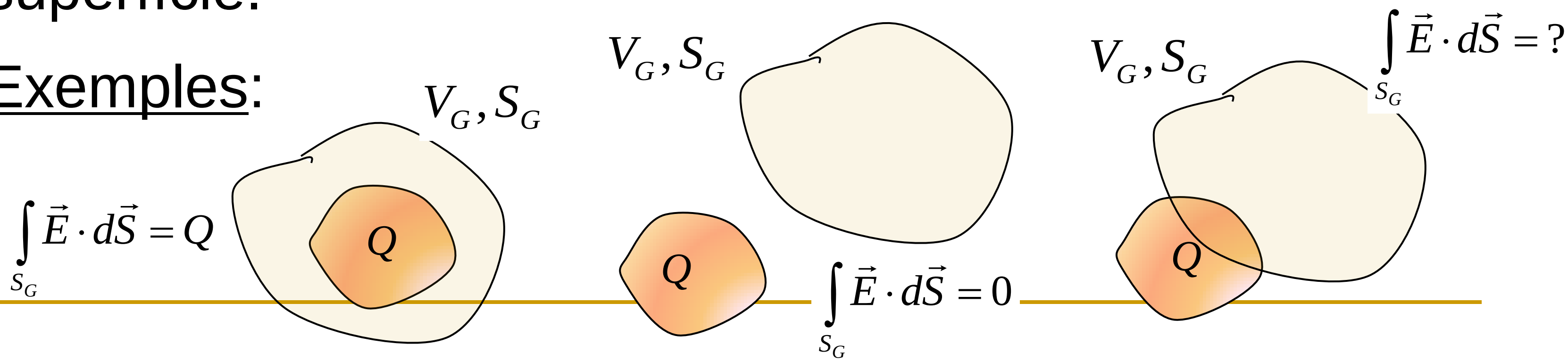
Càlcul del flux

- Per a **calcular el flux** del camp elèctric través d'una superfície mitjançant la llei de Gauss:

$$\int_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0}$$

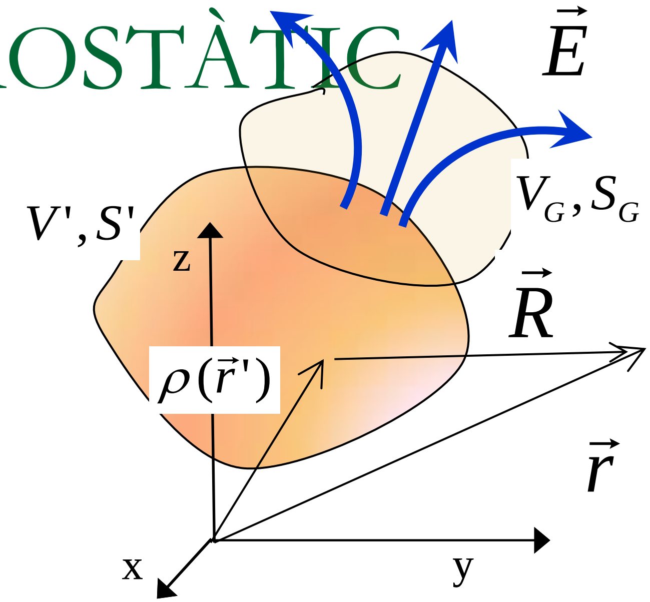
... només cal determinar la càrrega tancada dins de la superfície.

- <u>Exemples</u>:



Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss



Càlcul del camp elèctric

- Per a **calcular el camp elèctric** mitjançant la llei de Gauss (és un mètode més senzill que per integració directa):

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{component} S_G$$

- En certes geometries algun dels components del camp elèctric és constant sobre la superfície de Gauss i pot eixir de la integral. Aleshores només cal calcular la *q* tancada:

$$E_{component} = \frac{1}{S_G} \frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0}$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

GEOMETRIA ESFÈRICA

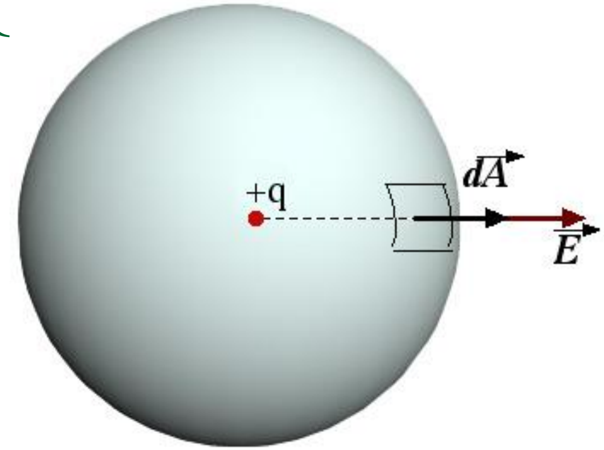
- Un camp vectorial té simetria esfèrica quan:

  - només té component radial;

  - aqueix component té simetria esfèrica:
    - només depèn de la distància a l'origen (radi)
    - no depèn de l'angle θ ni del φ.
- Per tant, el camp: $\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r + 0\vec{u}_\varphi + 0\vec{u}_\theta$
- Aleshores el camp és constant sobre esferes centrades en *O*.
- Per poder traure el component del camp, aleshores convé triar com a superfície de Gauss una esfera.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss



http://www.goiit.com/posts/show/47351.htm

GEOMETRIA ESFÈRICA

- El terme de l'esquerra:

$$\int_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_G} E_r \vec{u}_r \cdot dS\, \vec{u}_r = \int_{S_G} E_r \cdot dS = E_r \int_{S_G} dS = E_r S_G$$

- El terme de la dreta: $q_{tancada}/\varepsilon_0$

- La llei de Gauss ens permet igualar ambdós termes:

$$E_r S_G = \frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_r = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0}$$

$$S_G = 4\pi r^2$$

2.4. Teorema de Gauss

GEOMETRIA CILÍNDRICA

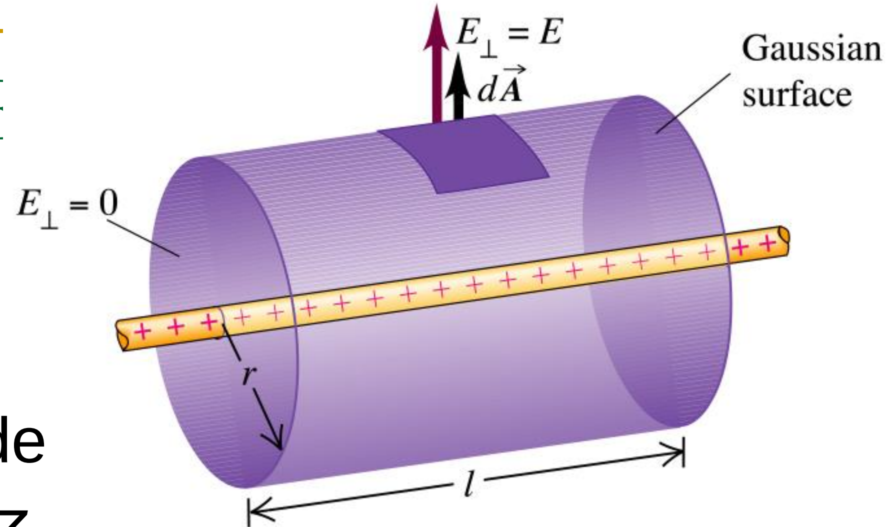
- Un camp vectorial té simetria cilíndrica quan els seus components tenen simetria cilíndrica.
- Un component té simetria cilíndrica si:

  - només depèn de la distància a l'eix *Z* (radi)

  - no depèn de *z* ni de l'angle *Φ* (coord. cilíndriques)
- Per tant, el camp: $\vec{E} = E_\rho(\rho)\vec{u}_\rho + E_\varphi(\rho)\,\vec{u}_\varphi + E_z(\rho)\,\vec{u}_z$
- Aleshores el camp és constant sobre cilindres centrats en l'eix *Z*.
- Per a poder fer la integral, convé triar la superfície de Gauss com a un cilindre.

Tema 2: EL CAMP ELE

2.4. Teorema de Gauss



http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html

GEOMETRIA CILÍNDRICA

- La superfície de Gauss ha de ser un cilindre amb l'eix en *Z*
- El terme de l'esquerra:

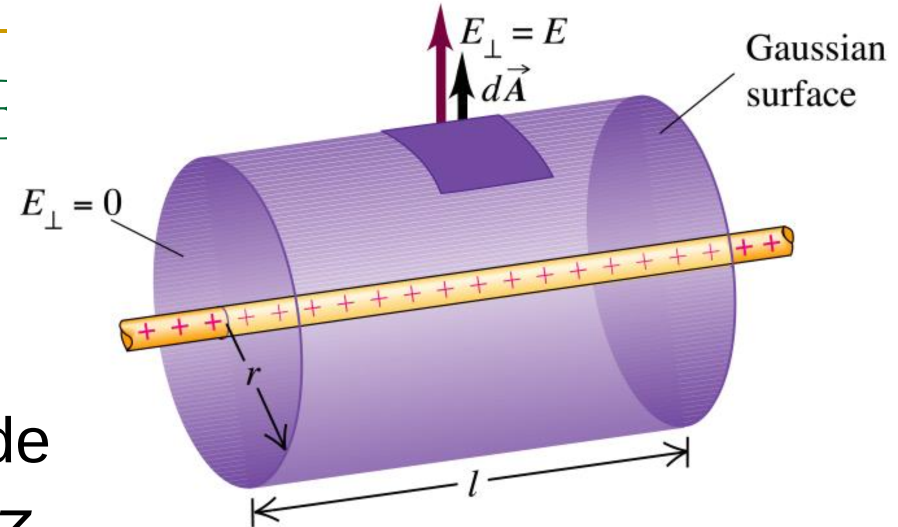
$$\int_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{base1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{base2}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

- En les bases el producte escalar és zero:

$$\int_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 + \int_{S_{lateral}} E_\rho \vec{u}_\rho \cdot dS\,\vec{u}_\rho + 0 = \int_{S_{lateral}} E_\rho \cdot dS = E_\rho \int_{S_{lateral}} dS = E_\rho S_{lateral}$$

Tema 2: EL CAMP ELE

2.4. Teorema de Gauss



http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html

GEOMETRIA CILÍNDRICA

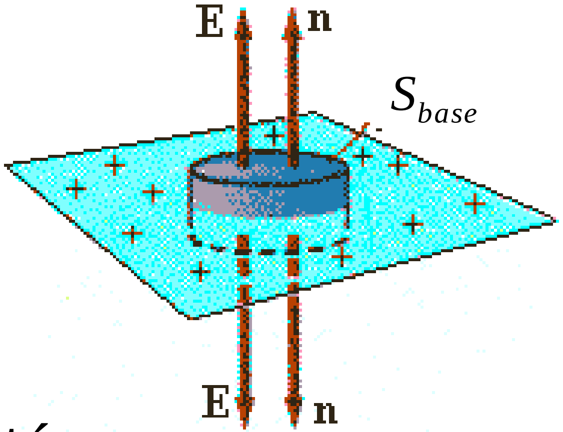
- La superfície de Gauss ha de ser un cilindre amb l'eix en *Z*
- El terme de la <u>dreta</u>: $q_{tancada}/\varepsilon_0$
- La llei de Gauss ens permet igualar ambdós termes:

$$E_\rho S_{lateral} = \frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E_\rho = \frac{1}{2\pi\rho L}\frac{q_{tancada}}{\varepsilon_0}$$

$$S_{lateral} = 2\pi\rho L$$

Tema 2: EL CAMP ELECTRO

2.4. Teorema de Gauss



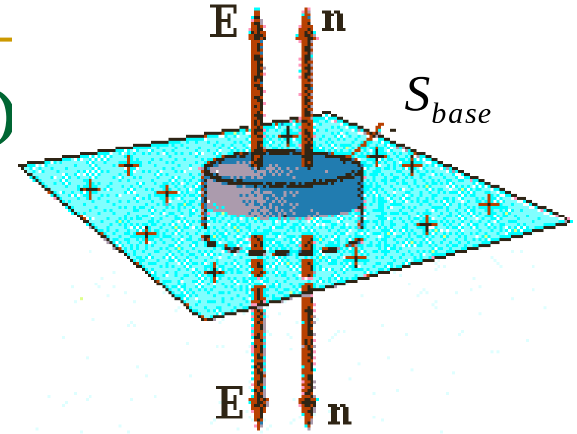
GEOMETRIA PLANA

- Es parla de geometria plana quan es té un pla infinit amb una densitat superficial de càrrega σ.
- El camp vectorial que té simetria plana:
  - té direcció rectilínia perpendicular al pla, que fem coincidir amb algun eix (típicament *Z*);
  - el pla és paral·lel a les altres direccions (pla *X*-*Y*

- Convé triar com superfície de Gauss un cilindre amb les bases paral·leles al pla.

Tema 2: EL CAMP ELECTRO

2.4. Teorema de Gauss



GEOMETRIA PLANA

- El terme de <u>l'esquerra</u>:

$$\int_{S_V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{base1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_{base1}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

- En la superfície lateral del cilindre el producte escalar és zero i en les bases els vectors superfície tenen direcció oposada, però el mateix mòdul:

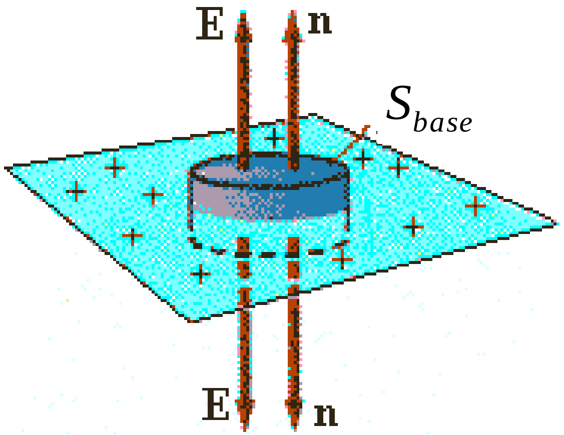
$$\int_{S_V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{base1}} E_z\vec{n}\cdot dS\,\vec{n} + 0 + \int_{S_{base1}} E_z\vec{n}\cdot dS\,\vec{n} = \int_{S_{base}} E_z\cdot dS + \int_{S_{base}} E_z\cdot dS =$$

$$= \left(\left|E_z(z)\right| + \left|E_z(-z)\right|\right)\int_{S_{base}} dS = \left(\left|E_z(z)\right| + \left|E_z(-z)\right|\right)S_{base}$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html



GEOMETRIA PLANA

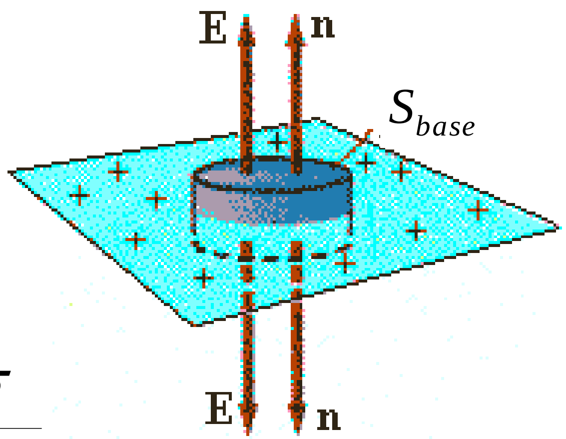
- El terme de la <u>dreta</u>: $q_{tancada}/\varepsilon_0$
- La llei de Gauss ens permet igualar ambdós termes:

$$\left(\left|E_z(z)\right| + \left|E_z(-z)\right|\right) S_{base} = \frac{\sigma\, S_{base}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(\left|E_z(z)\right| + \left|E_z(-z)\right|\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

2.4. Teorema de Gauss

http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html



GEOMETRIA PLANA

- Si la densitat superficial de càrrega està en un pla sense medis materials als dos costats:

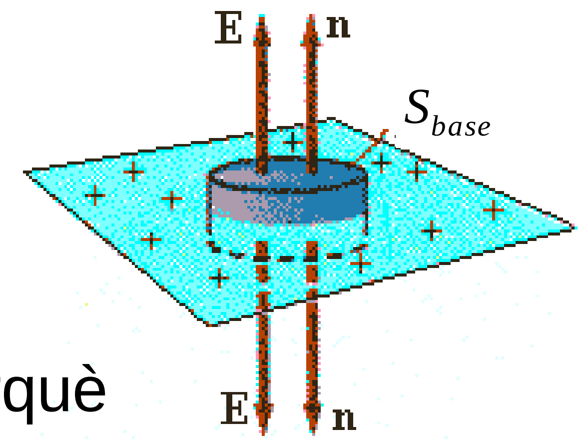
$$\left|E_z(z)\right| + \left|E_z(-z)\right| = 2E_z \quad \rightarrow \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- Si la densitat de càrrega σ està sobre la superfície d'un conductor, com dins del conductor (en z negatives) el camp elèctric és zero:

$$\left|E_z(z)\right| + 0 = \left|E_z(z)\right| \qquad \rightarrow \qquad \left|E_z\right|_{medi\,exterior} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

2.4. Teorema de Gauss

http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html



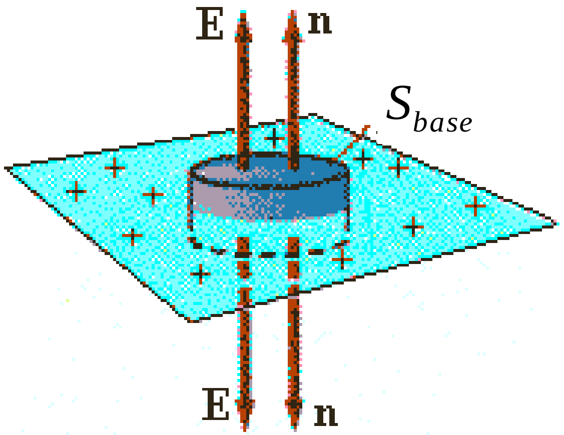
GEOMETRIA PLANA

- Perquè el camp calculat no depèn de la distancia al pla?
- Si un pla es considera infinit, es perquè s'està molt prop del pla. La variable dominant és la densitat de càrrega i no la distància al pla.
- Si ens allunyem, cal considerar la geometria finita del pla i aleshores s'obté una dependència amb la distància.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html



GEOMETRIA PLANA

- Com més finita és la font, més marcada és la dependència del camp amb la distància (veure Griffiths, exemple 2.4):

- Camp creat per una esfera: disminueix com $1/r^2$.
- Camp creat per una línia de càrrega infinita: disminueix com 1/r.
- Camp creat per un pla amb una densitat de càrrega superficial: no disminueix amb la distància.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Exemples

- Fil infinit amb una densitat de càrrega λ.
- Vegeu document sobre SIMETRIES.
- Vegeu document sobre ESTRATÈGIES DE CÀLCUL.
- Vegeu document sobre PLA CARREGAT.