

---

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

- 
- 5.1. Introducció
  - 5.2. Llei d'Ampère
  - 5.3. Camp magnètic. Divergència i rotor del camp magnetostàtic
  - 5.4. Teorema d'Ampère
  - 5.5. Potencial vector
  - 5.6. La llei de la força de Lorentz. Moviment de càrregues en camps elèctrics i magnètics

---

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

---

## **BIBLIOGRAFIA**

Griffiths	Tema 5
Pomer	Tema 3
Reitz-Milford-Christy	Tema 8

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.1. Introducció

### Magnetostàtica

- És equivalent a l'electrostàtica: estudia corrents estacionaris.
- L'estudi de la magnetostàtica es va iniciar a la ciutat de Magnèsia (Grècia), on es va descobrir un mineral (magnetita:  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) que s'atreia i repel·lia.
- A la Xina es descobrí la brúixola (abans de Crist).
- La brúixola arribà a Europa en el segle XII i es va utilitzar sobretot en navegació.



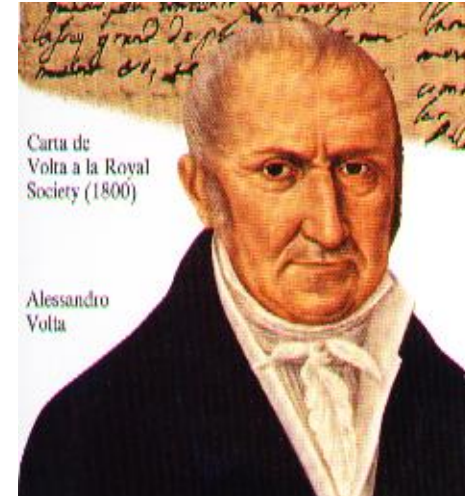
*Figura P858, Tipler 5a ed.*

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

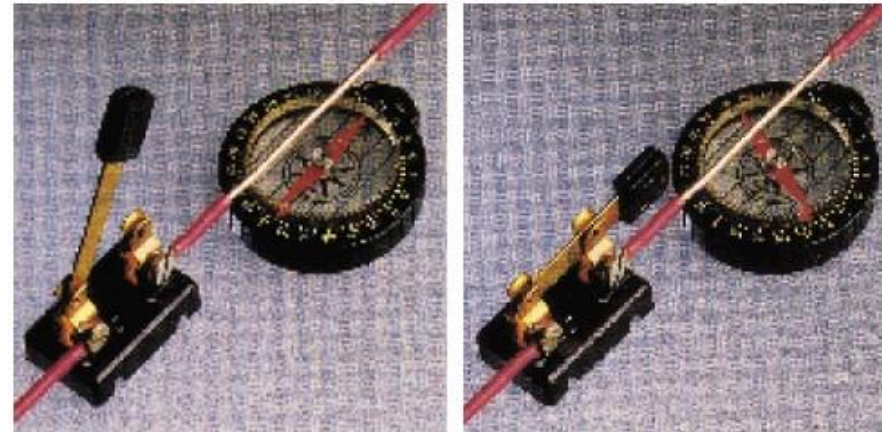
## 5.1. Introducció

### Magnetostàtica

- Volta en 1800 va inventar la “pila” per a generar corrents.
- Primer indici de connexió electricitat-magnetisme: Oersted (1820).
- Biot i Savart (1825): interacció entre circuits senzills.
- Ampère generalitza la interacció entre circuits: PUNT PARTIDA.



[http://es.wikipedia.org/wiki/Alessandro\\_Volta](http://es.wikipedia.org/wiki/Alessandro_Volta)

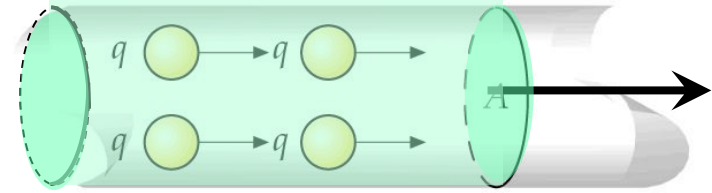


*Figura P.881, Tipler 5a ed.*

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

Figura 25.1, Tipler 5a ed.



### Formulació

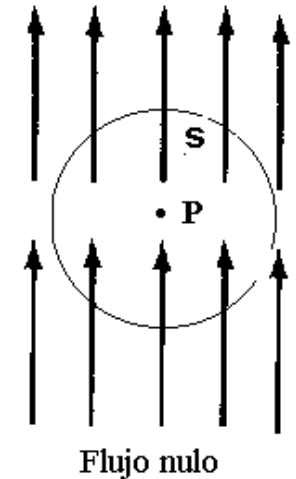
- Magnetostàtica: **corrents estacionaris** (no varien amb t).

>  $v \neq v(t)$ ,  $\rho \neq \rho(t)$ : encara que la càrrega entra i ix, la densitat de  $q$  és constant (no s'acumula).

>  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$  de l'equació de continuïtat:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

>> els corrents estacionaris són solenoïdals (amb línies de corrent tancades).



>> a través d'una superfície tancada  $S$ , el flux és zero.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \cdot dV = 0$$

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

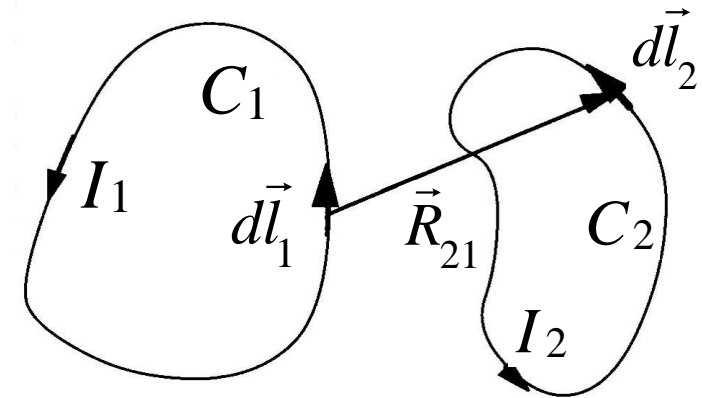
## 5.2. Llei d'Ampère

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ampere1.jpg>



### Formulació

- Electroestàtica: Llei de Coulomb (força entre càrregues  $q$  individuals)
- Magnetostàtica: Llei d'Ampère (força entre circuits).
- Caldria esperar que en magnetostàtica tractàrem amb elements de corrent.
- Però, en l'àmbit del laboratori, només podem treballar amb circuits complets.
- Considerarem, doncs, circuits complets. Començarem per la força entre dos circuits.



# Tema 5: EL CAMP MAGNETOST

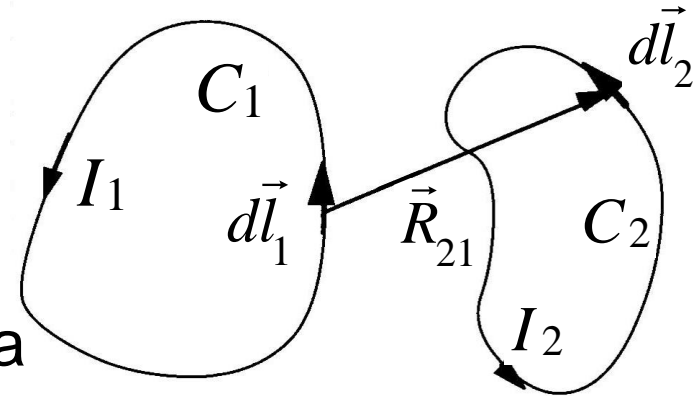
## 5.2. Llei d'Ampère

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ampere1.jpg>



### Formulació

- Respecte dels circuits:
  - Considerarem circuits de forma arbitrària, recorreguts per corrents estacionaris.
  - Suposarem els circuits ideals, sense bateries.
  - Conceptualment, treballarem amb elements de corrents, encara que no es poden aconseguir de forma experimental.

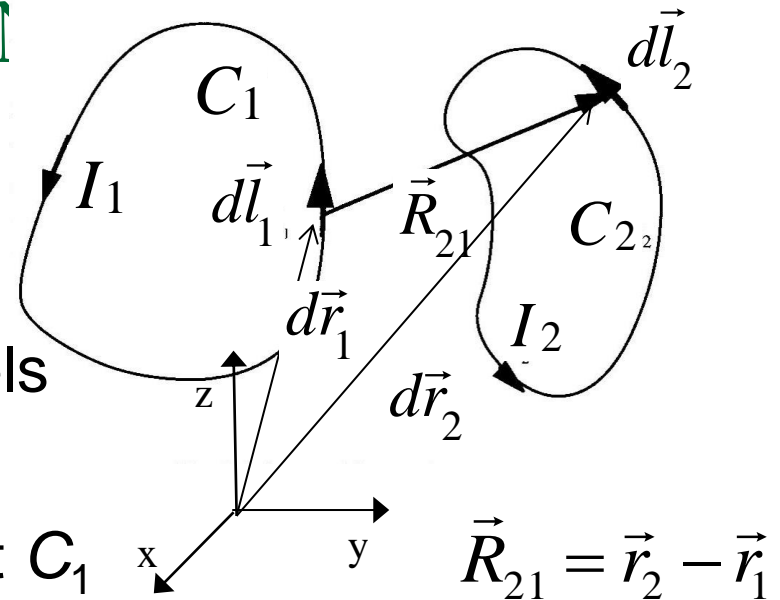


# Tema 5: EL CAMP MAGNÈTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

### Formulació

- Siguen dos circuits ( $C_1$ ,  $C_2$ ) pels quals circulen corrents ( $I_1$ ,  $I_2$ ).
- La força que exerceix el circuit  $C_1$  sobre el  $C_2$  és:



$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3}$$

**Llei d'Ampère**  
(*lleï experimental*)

- > Generalització dels resultats experimentals d'Ampère
- > Expressió complicada: fonts vectorials
- >  $\mu_0$ : permeabilitat magnètica del buit, es defineix com:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N / A}^2$$



# Tema 5: EL CAMP MAGNÈTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

### Formulació

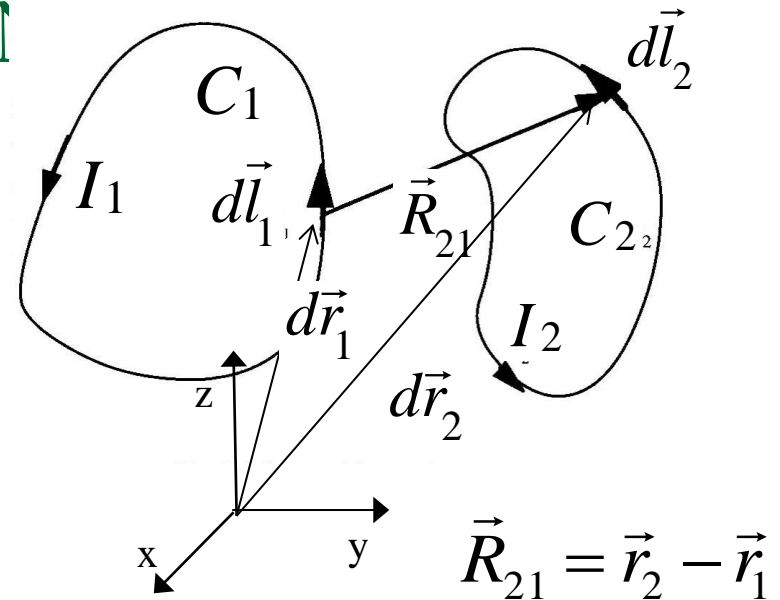
#### ■ NOTA:

> Quan circula un corrent estacionari per un circuit, la densitat de càrrega es manté constant.

> Per tant, no hi ha moviment **net** de càrrega i...

> ... no es crea camp elèctric

> La força entre circuits és estrictament deguda a fenòmens magnètics, no elèctrics.



# Tema 5: EL CAMP MAGNÈTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

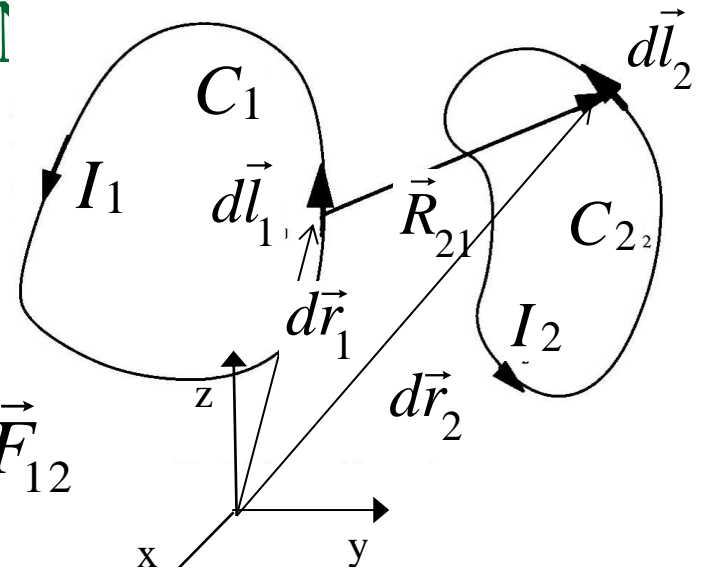
### Característiques

- L'expressió és simètrica i compleix el principi d'acció i reacció:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$
- Encara que aparentment el numerador no és simètric quan considerem els elements diferencials:

$$d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21}) = d\vec{l}_1 \cdot (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21}) - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \cdot \vec{R}_{21}$$

- ... però SÍ que és simètric quan operem de forma integral:

$$\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} = \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} - \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \cdot \vec{R}_{21}}{R_{21}^3}$$



# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

### Característiques

- El primer terme de la dreta:

$$\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot (d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} = \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{R}_{21}}{R_{21}^3} = \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \cdot \left[ -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{R_{21}} \right) \right]$$

perquè:  $\frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{R_{21}} \right)$

- La integral relativa a  $C_2$  és nul·la,

ja que:

$$d\vec{l}_2 \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{R_{21}} \right) = d \left( \frac{1}{R_{21}} \right) \quad \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \cdot \left[ -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{R_{21}} \right) \right] = - \oint_{C_2} d \left( \frac{1}{R_{21}} \right) = 0$$

---

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

### Característiques

- Per tant, només queda el segon membre, que SÍ que és simètric:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \cdot \vec{R}_{21}}{R_{21}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \cdot \vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\vec{F}_{21}} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{-\vec{F}_{12}}$

- Ja que:  $\vec{R}_{21} = -\vec{R}_{12} \quad R_{21} = R_{12}$

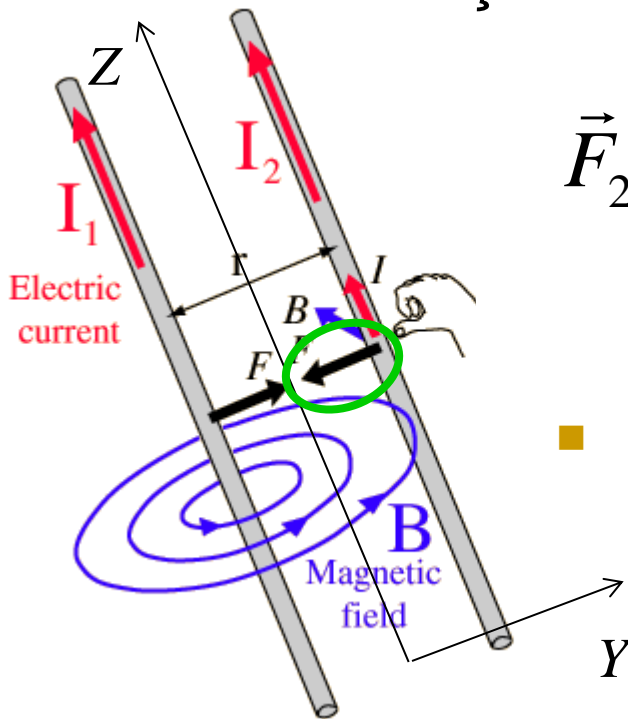
- Finalment:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

### Sentit relatiu de les forces

EXEMPLE: força entre dos fils rectilinis



$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \cdot \vec{R}_{21}}{R_{21}^3}$$

- Força de  $C_1$  sobre  $C_2$ :

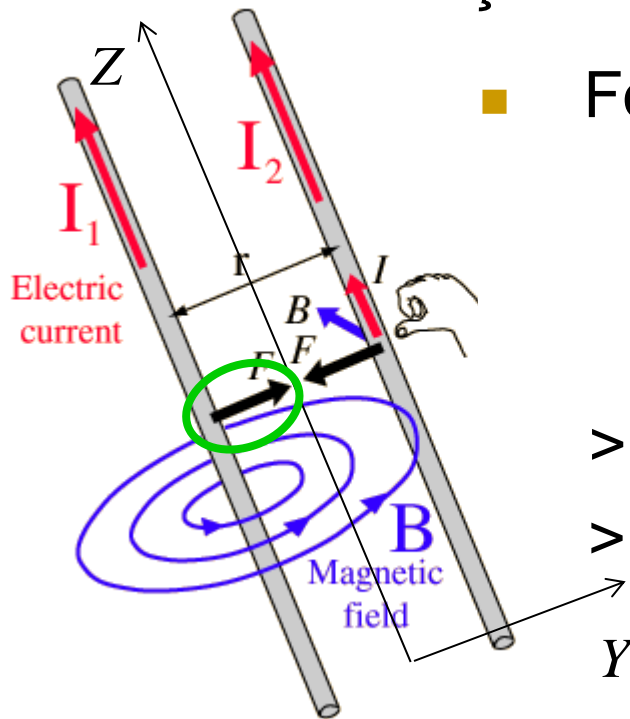
$$\frac{\vec{F}_{21}}{L_1} = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 (-\vec{u}_y)$$

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

### Sentit relatiu de les forces

EXEMPLE: força entre dos fils rectilinis



- Força de  $C_2$  sobre  $C_1$ :

$$\frac{\vec{F}_{12}}{L_2} = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 (+\vec{u}_y)$$

- > Si mateix sentit ( $I_1 \cdot I_2$  positiu):  $F$  atractiva
- > Si sentit oposat ( $I_1 \cdot I_2$  negatiu):  $F$  repulsiva

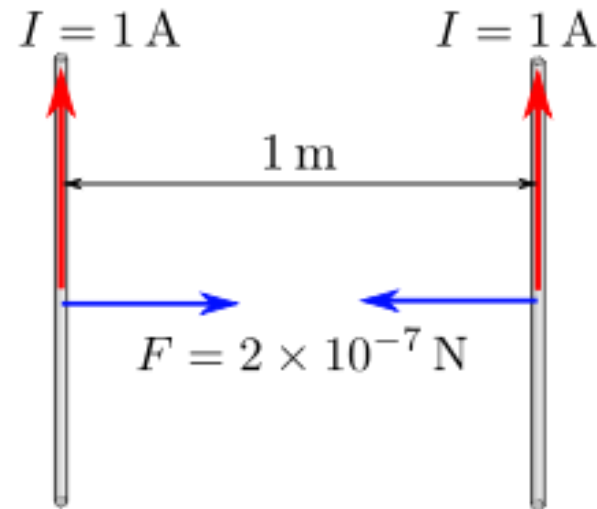
# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.2. Llei d'Ampère

**Definició de la unitat de corrent:**  $\frac{\vec{F}_{21}}{1} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi \cdot 1} 1 \cdot 1(-\vec{u}_y) = 2 \times 10^{-7}(-\vec{u}_y) N$

- La força entre corrents filiformes i rectilinis serveix per a definir la unitat de corrent, l'ampere:

*“L'ampere és la intensitat que circula per dos conductors rectilinis, molt llargs i paral·lels, situats en el buit, a una distancia d'1 metre i que produeixen, en 1 metre de cada un d'aquests, una força de  $2 \times 10^{-7} N$ ”.*



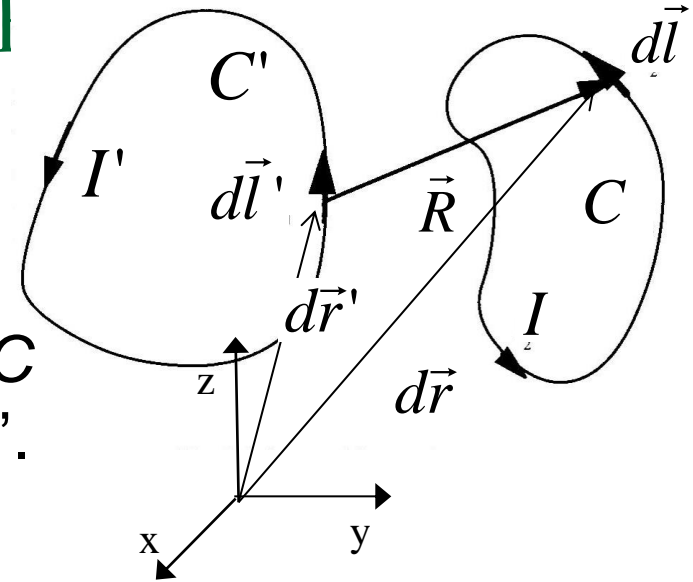
<http://en.wikipedia.org/wiki/Ampere>

# Tema 5: EL CAMP MAGNÈTIC

## 5.3. Camp magnètic

### **B creat per un circuit**

- Suposem dos circuits filiformes,  $C$  i  $C'$ , recorreguts per corrents  $I$  i  $I'$ .
- La força de  $C'$  sobre  $C$ :



- Agrupant:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_C \oint_{C'} \frac{d\vec{l} \times (d\vec{l}' \times \vec{R})}{R^3}$$
$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \right]$$



# Tema 5: EL CAMP MAGNÈTIC

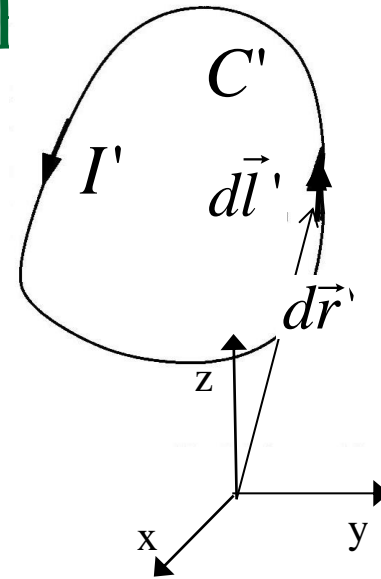
## 5.3. Camp magnètic

### *B* creat per un circuit

- El terme entre parèntesis depèn només de  $C'$ .
- Definim el camp magnètic creat pel corrent filiforme  $I'$  com:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

- Concepte equivalent al del camp elèctric: camp que depèn de  $r^{-2}$  i s'estén fins a l'infinit.



- Unitats: tesla (T)

# Tema 5: EL CAMP MAGNÈTIC

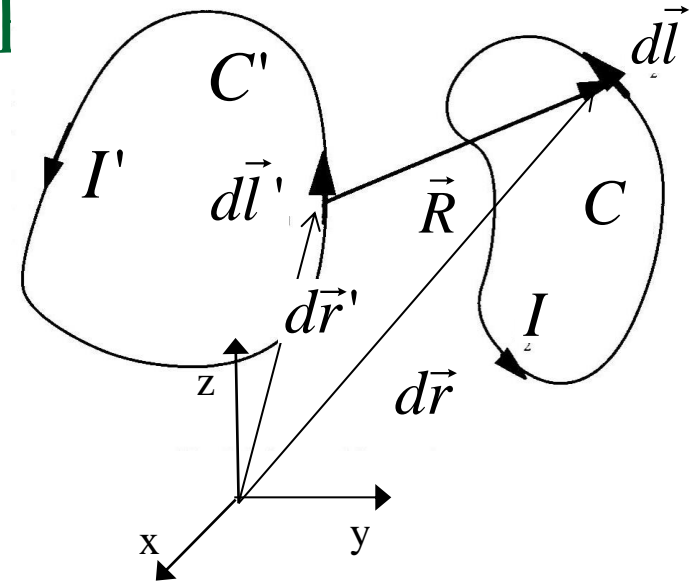
## 5.3. Camp magnètic

### *B* creat per un circuit

- La força es pot calcular utilitzant el camp com a pas intermediari.
- Força que exerceix un camp *B* sobre un circuit *C* pel qual circula un corrent *I*:

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

- Tant el camp magnètic com la força compleixen el principi de superposició.



---

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.3. Camp magnètic

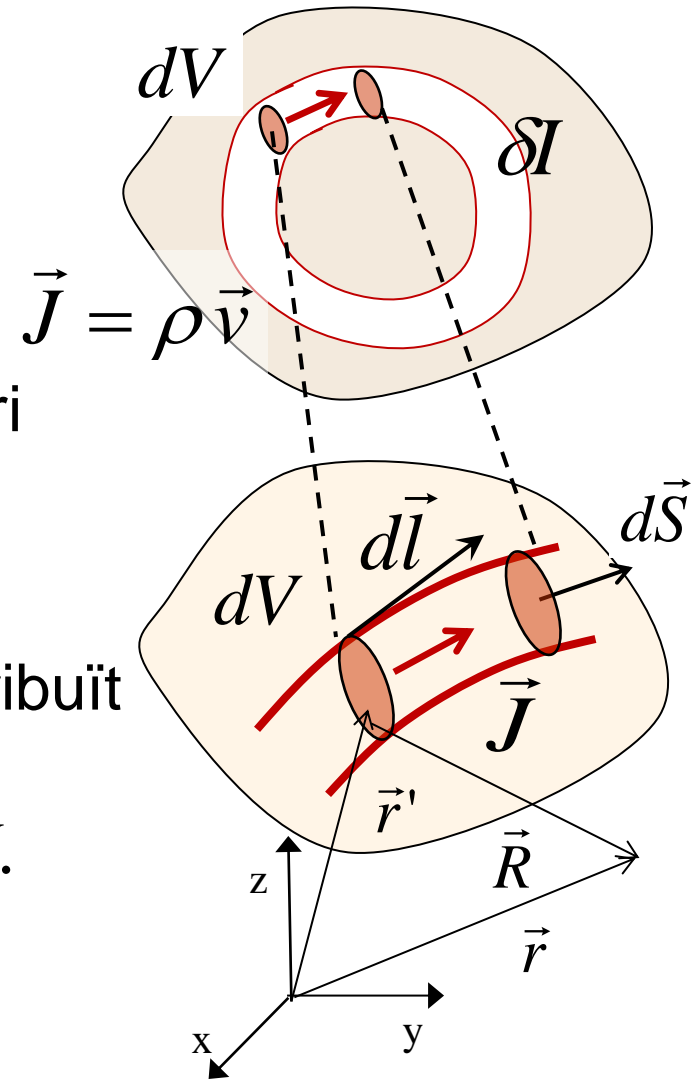
### ***CORRENTS DISTRIBUÏTS***

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.3. Camp magnètic

### **$B$ creat per un corrent distribuït**

- Densitat volumètrica de corrent  $\vec{J}$ .  
 $\vec{J} = \rho \vec{v}$
- Magnetostàtica: corrent estacionari ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ ) amb línies de corrent tancades.
- Considerarem que un corrent distribuït en volum és un conjunt de fils elementals tancats amb corrent  $\delta I$ .
  - Un element de volum  $dV$  forma part del corrent elemental  $\delta I$ .



# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.3. Camp magnètic

### **B creat per un corrent distribuït**

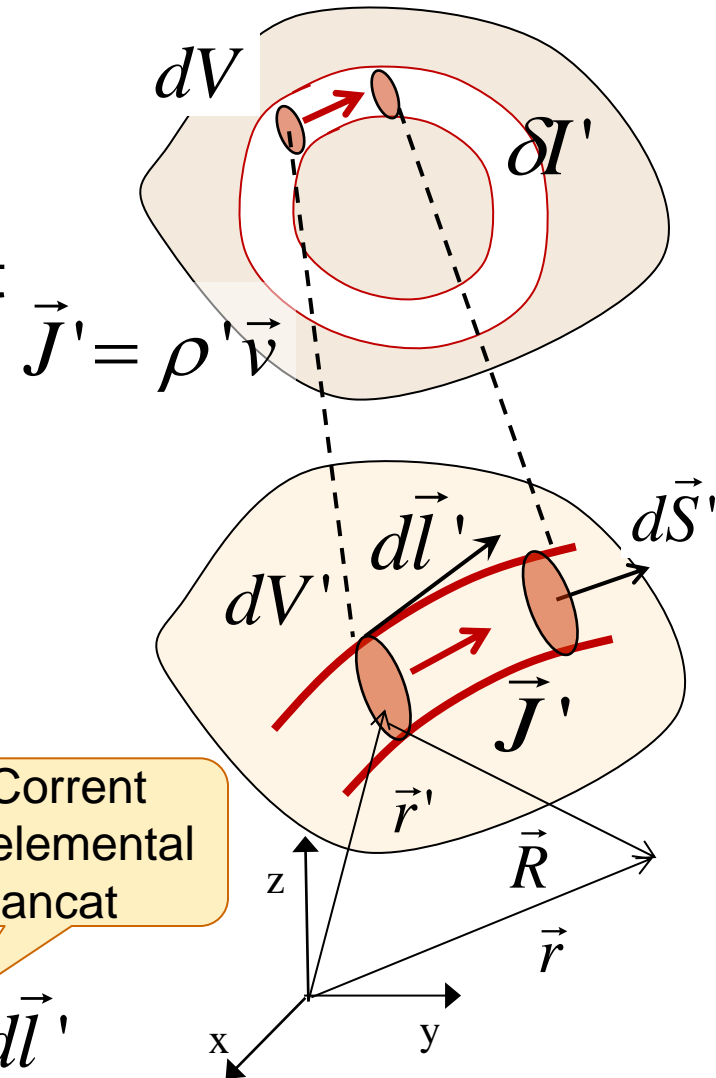
- El camp magnètic elemental creat pel corrent elemental  $\delta I'$  és:

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \delta I' \oint \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

- Per expressar aqueix corrent en funció de la densitat de corrent:

$$\vec{J}'(\vec{r}') dV' = \rho' \vec{v}' dV' =$$

$$= \frac{dq'}{dV'} \frac{d\vec{l}'}{dt} dV' = \frac{dq'}{dt} d\vec{l}' = \delta I' d\vec{l}'$$



# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.3. Camp magnètic

### **B creat per un corrent distribuït**

- Per tant, el camp magnètic creat per una densitat volumètrica de corrent serà:

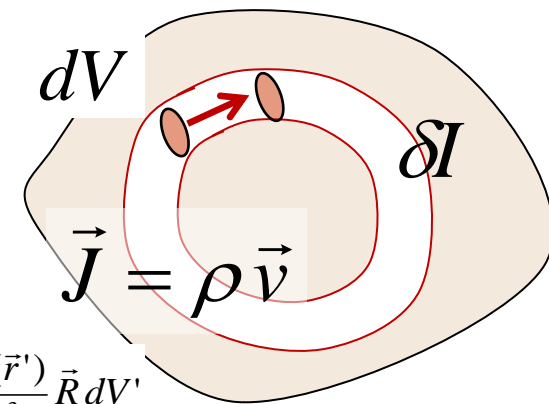
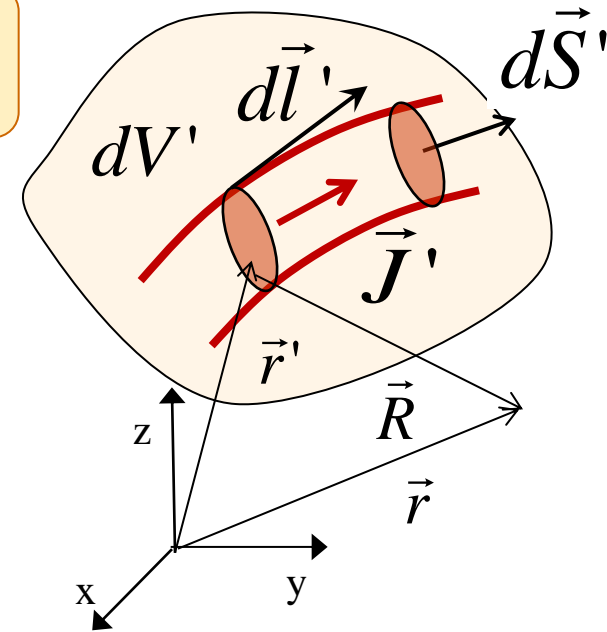
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}'(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \quad \text{Llei de Biot i Savart}$$

- La força d'un camp magnètic sobre una densitat volumètrica de corrent:

$$\vec{F} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B} dV$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3} \vec{R} dV'$$

Crea el camp B



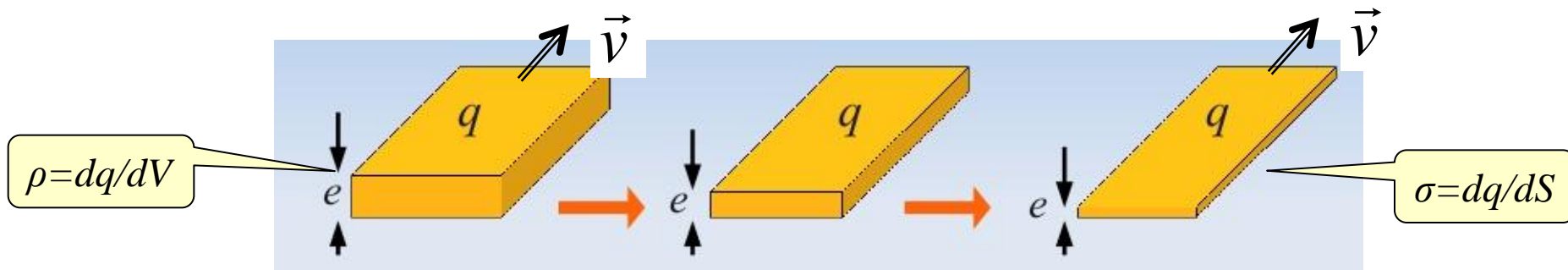
“Pateix” la força F

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.3. Camp magnètic

### $B$ creat per un corrent distribuït

- En el cas d'un corrent superficial  $K$ :
  - > Una de les dimensions de la secció transversal és molt menuda.
  - > La densitat de càrrega està distribuïda en la superfície **tangencial** a la velocitat.



> Si  $\vec{K} = \sigma \vec{v}$ , aleshores:

$$\vec{K} \cdot d\vec{S} = \sigma \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dS} \frac{d\vec{l}}{dt} dS = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = \delta I d\vec{l}$$

# Tema 5: EL CAMP MAGNETOSTÀTIC

## 5.3. Camp magnètic

Crea el  
camp B

### **B creat per un corrent distribuït**

- Per tant, el camp magnètic creat per una densitat superficial de corrent serà:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K}'(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dS'$$

- La força que exerceix un camp magnètic  $B$  sobre una densitat superficial de corrent  $K$  serà:

$$\vec{F} = \int_S \vec{K}(\vec{r}) \times \vec{B} dS$$

“Pateix” la  
força  $F$