

---

# Tema 3: DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

---

- 3.1. Introducció
- 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric
- 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic
- 3.4. Distribucions de dipols elèctrics

---

# Tema 3: DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

---

## **BIBLIOGRAFIA**

Griffiths

Tema 3

Pomer

Tema 4

Reitz-Milford

Tema 2

Wangness

Tema 8

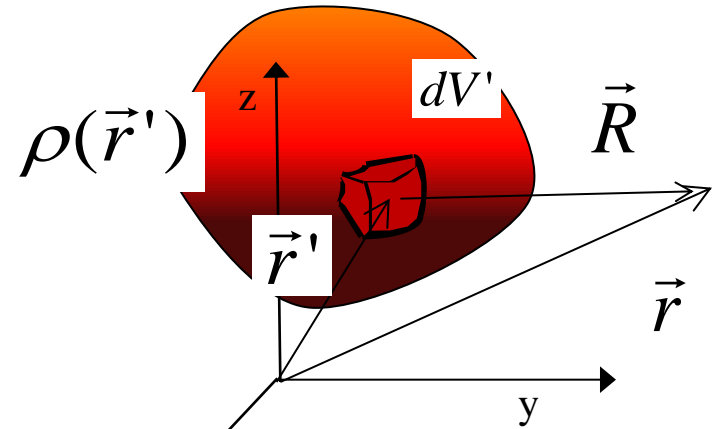
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.1. Introducció

### Plantejament

- Potencial d'una  $\rho$  finita ( $V'$ ):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'$$



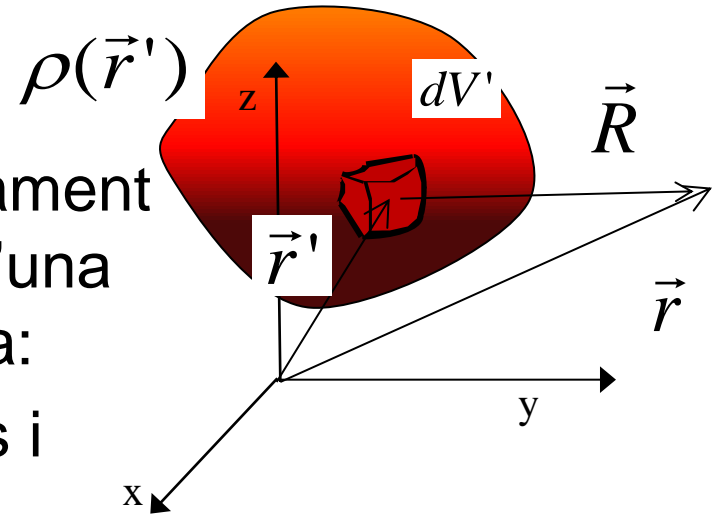
- Prop de la densitat, el potencial i el camp elèctric depenen dels detalls fins de la càrrega i la geometria.
- A mesura que ens allunyem, els detalls perden importància (exemple: medis materials).
- Molt lluny ( $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ ) només es veu la càrrega, el potencial i el camp elèctric són els d'una Q puntual.
- Però, i si  $Q = 0$ ? (essent  $\rho \neq 0$ ) Com es veu de lluny?

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.1. Introducció

### Plantejament

- Pretenem estudiar el comportament a mitjanes i grans distàncies d'una distribució arbitrària de càrrega:
  - en funció d'elements simples i puntuals;
  - que donen compte de certs aspectes característics de la distribució de la càrrega;
  - que siguin fàcils de calcular.
- Aqueixos elements → **MULTIPOLS ELÈCTRICS**
- Semblant al centre de masses o el moment d'inèrcia.



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.1. Introducció

### Plantejament

- Com obtindrem aqueixos elements? Per al potencial creat per una distribució de càrregues:
  - > suposarem la distribució prop de l'origen ( $r' \sim 0$ ).
  - > desenvoluparem en sèrie de Taylor el terme  $1/R$
  - > obtindrem el potencial en potències de  $r$
- Previ al desenvolupament, introduïrem el concepte de dipol elèctric, ja que apareixerà com un dels termes del desenvolupament.

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.1. Introducció

### Aplicació dels multipols elèctrics: estudi de la matèria

- Objectiu general: a partir d'elements a escala microscòpica, descriure la matèria a escala macroscòpica. Especial aplicació en dielèctrics.
- Mètode: relacionant els termes del desenvolupament que se suposa que estan relacionats amb els aspectes característics de la distribució de càrrega...  
... amb les característiques microscòpiques específiques de la matèria (molècules o ions lligats), que en general és neutra, però que pot tenir un moment dipolar no nul.
- Finalment: determinar el potencial que creen aqueixos elements a grans distàncies i les seues característiques.

---

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### **EL DIPOL ELÈCTRIC**

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

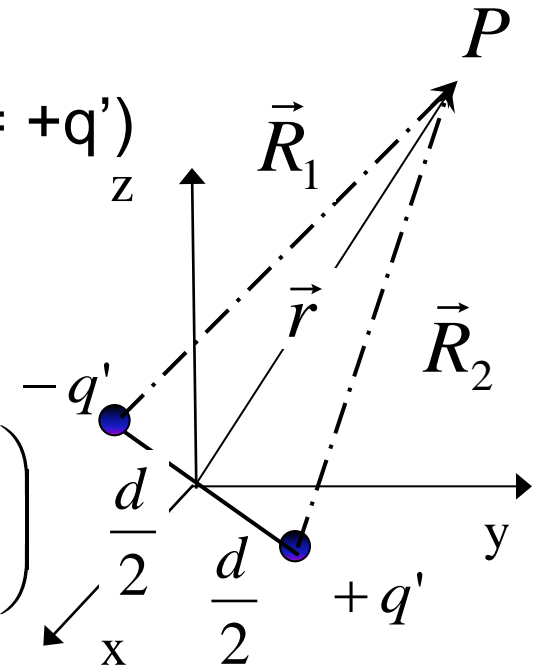
## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Definició

- El dipol elèctric és una estructura singular, formada per:
- Dues càrregues puntuals
  - iguals i de signe oposat ( $q'_1 = -q'$ ;  $q'_2 = +q'$ )
  - separades una distància  $d$

- Si càrregues prop de l'origen, en  $P$ :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



Per a punts llunyans  $r'_1, r'_2 \ll r$ , desenvolupant...



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$

### Definició

■ Tenim:  $\vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}'_1$   $R_1 = |\vec{R}_1| = |\vec{r} - \vec{r}'_1| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}'_1) \cdot (\vec{r} - \vec{r}'_1)}$

$$\vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{r}'_2 = r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}'_1 \cdot \vec{r}'_1}{r^2} + \frac{r'^2_1}{r^2}}$$

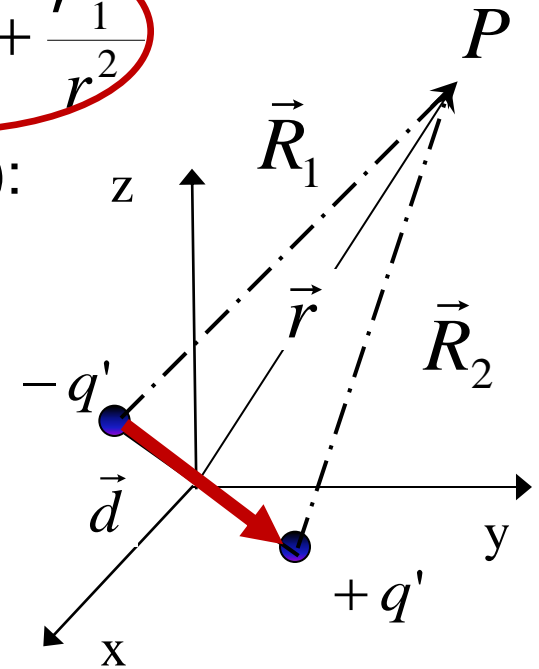
- Desenvolupant per a punts llunyans ( $d \ll r$ ):

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \cong \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2)}{r^3} \quad \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \vec{d}$$

- Per tant, el potencial en punts llunyans:

$$\phi(\vec{r}) \cong \frac{q' \vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

**moment dipolar**



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

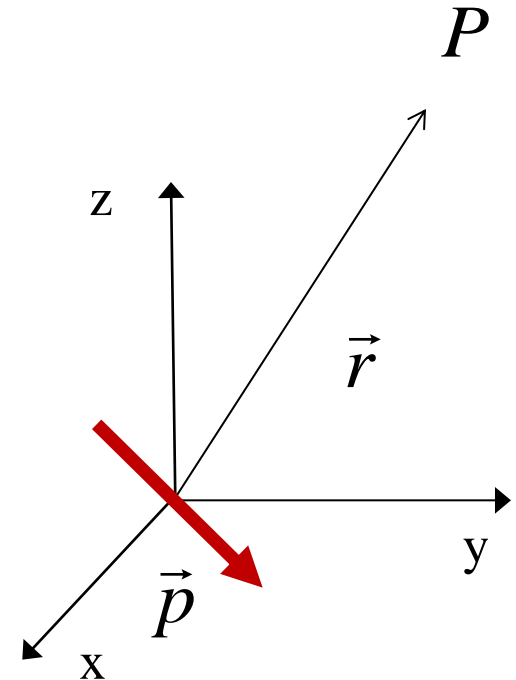
## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Dipol elèctric finit i dipol elèctric puntual

- En funció de la grandària de  $\mathbf{d}$ , el dipol és finit o puntual.
- En un **dipol finit** la distància  $\mathbf{d}$  és finita i el seu moment dipolar ve donat per:

$$\vec{p} = q' \cdot \vec{d}$$

- El moment dipolar  $\mathbf{p}$ :
  - és un vector
  - mòdul  $p = q' \cdot d$
  - direcció: de  $-q$  cap a  $+q$



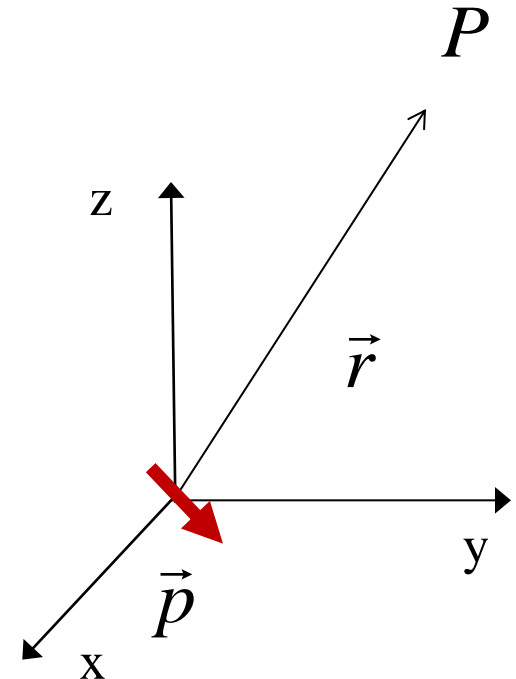
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Dipol elèctric finit i dipol elèctric puntual

- En funció de la grandària de  $\mathbf{d}$ , el dipol és finit o puntual.
- Un **dipol puntual** es defineix com un dipol amb les dues càrregues molt properes, però ... tals que el moment dipolar elèctric no és zero.
- Per tant, el dipol elèctric puntual té un moment dipolar elèctric  $\mathbf{p}$  donat per:

$$\vec{p} = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ q' \cdot d = cte}} q' \cdot \vec{d}$$



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

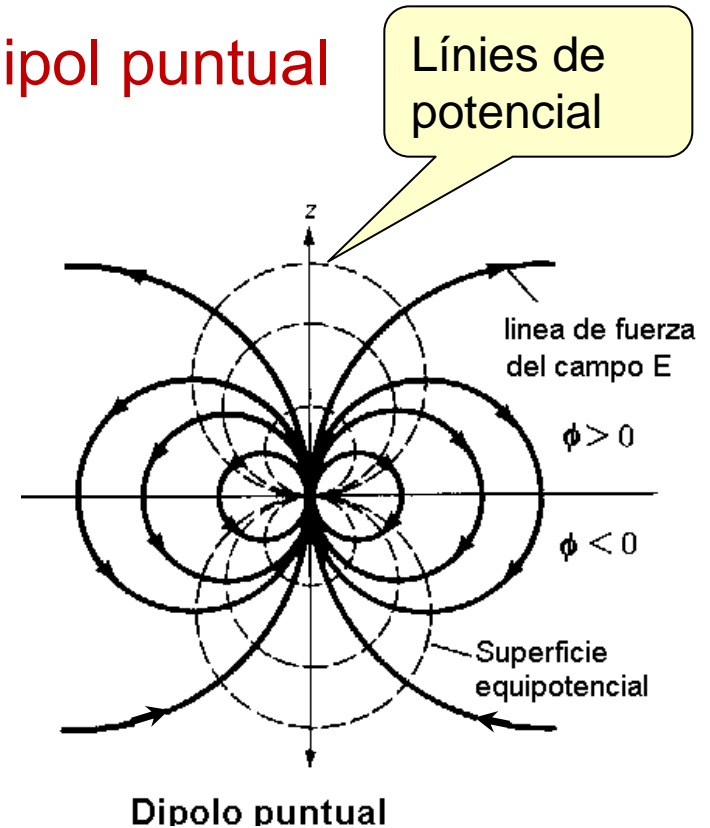
## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Característiques del potencial d'un dipol puntual

- El potencial d'un dipol puntual:
  - ve donat exactament per:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- depèn de  $r^{-2}$ :  $\phi(\vec{r}) = f\left(\frac{1}{r^2}\right)$
- són cercles no concèntrics i tangencials
- té simetria de revolució al voltant del vector  $\mathbf{p}$  com a eix



<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/equipot.html>

---

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### **CAMP ELÈCTRIC D'UN DIPOL**

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

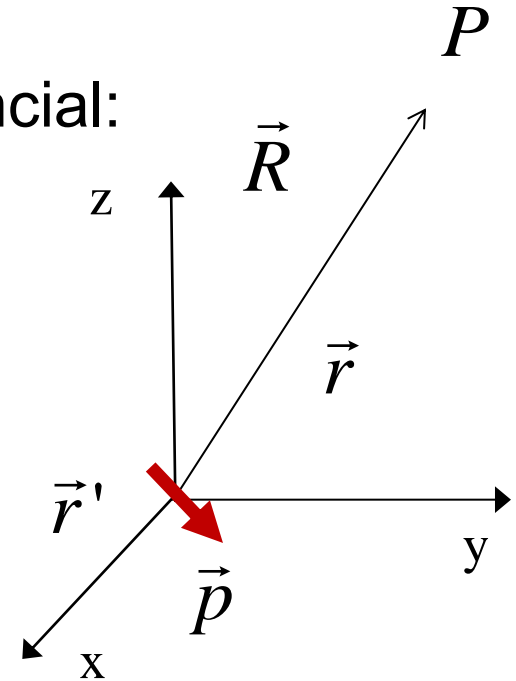
## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Camp elèctric d'un dipol puntual

- El camp elèctric s'obté derivant el potencial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi = -\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$



- En general, com que un dipol s'observa a grans distàncies, és convenient treballar en c. esfèriques.
- PERÒ: el dipol el suposarem al llarg de l'eix Z:  $\vec{p} = p_0 \vec{u}_z$

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Camp elèctric d'un dipol puntual

Al llarg de l'eix Z

- Dipol elèctric en l'origen en **coord. esfèriques**:

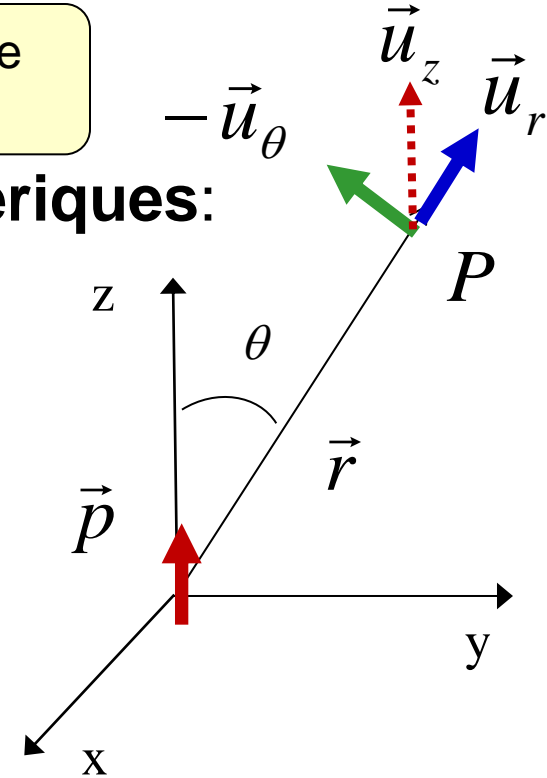
$$\vec{p} = p_0 \vec{u}_z = -p_0 \sin \theta \vec{u}_\theta + p_0 \cos \theta \vec{u}_r$$

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad \vec{p} \cdot \vec{r} = p_0 r \cos \theta$$

- El camp elèctric, operant:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(p_0 \cos \theta) \vec{u}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_0 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

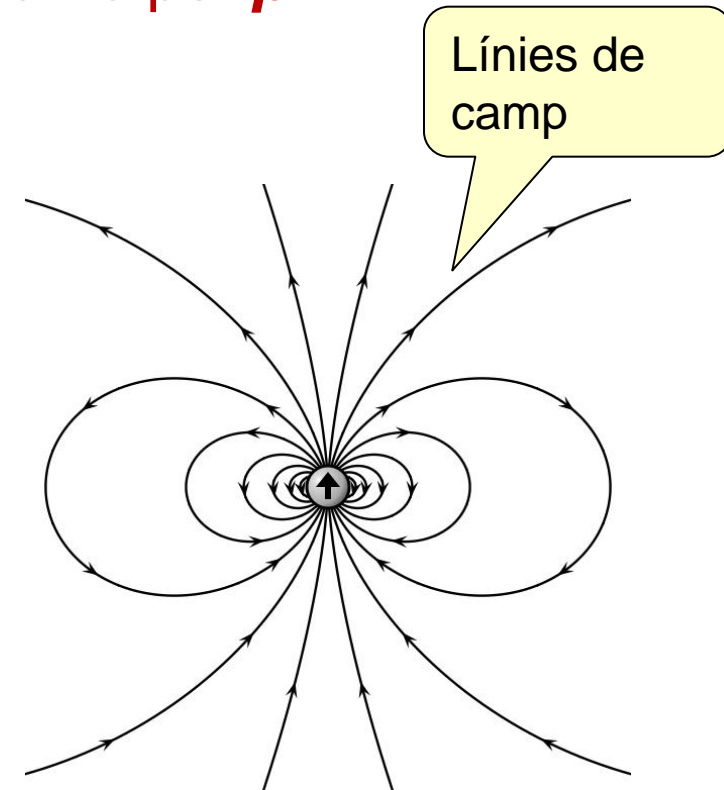
## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Característiques del camp elèctric d'un dipol $\mathbf{p}$

- El camp elèctric d'un dipol:

– depèn de  $r^{-3}$ :  $E(\vec{r}) = f\left(\frac{1}{r^3}\right)$

- té component radial i polar;
- té simetria de revolució al voltant del vector  $\mathbf{p}$  com a eix.



<http://en.wikipedia.org/wiki/Dipole>

Dipol elèctric puntual

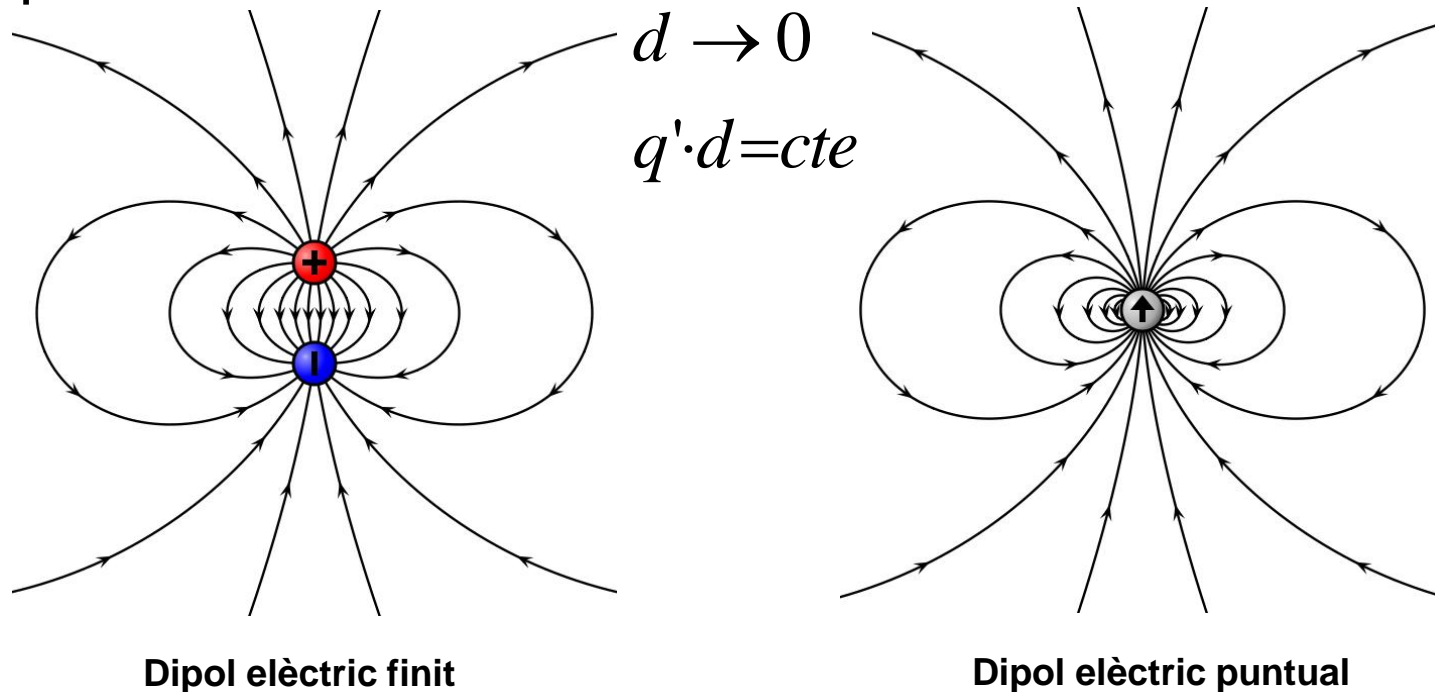


# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Característiques del camp elèctric d'un dipol

- Diferència entre el camp d'un dipol finit i d'un de puntual:



<http://en.wikipedia.org/wiki/Dipole>

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.2. El dipol elèctric, potencial i camp elèctric

### Potencial i camp d'un dipol elèctric puntual fora de l'origen

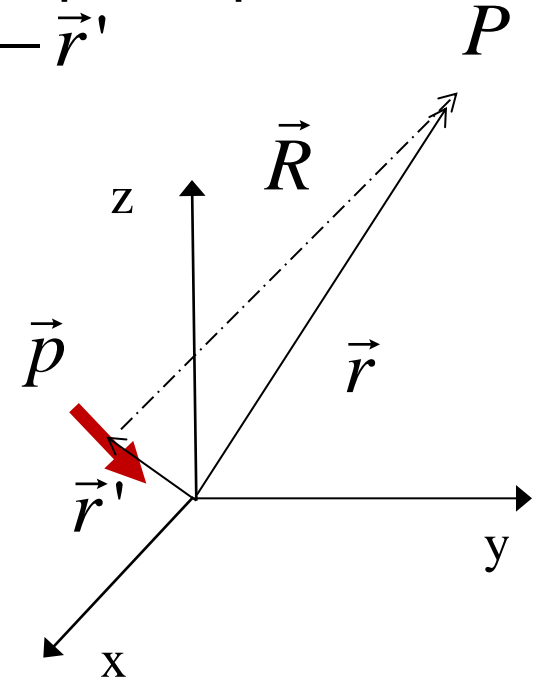
- El dipol puntual, com a entitat individual, pot suposar-se fora de l'origen. En aqueix cas:  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

- Potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

- Camp elèctric:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^5}$$



---

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### **DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR**

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Desenvolupament

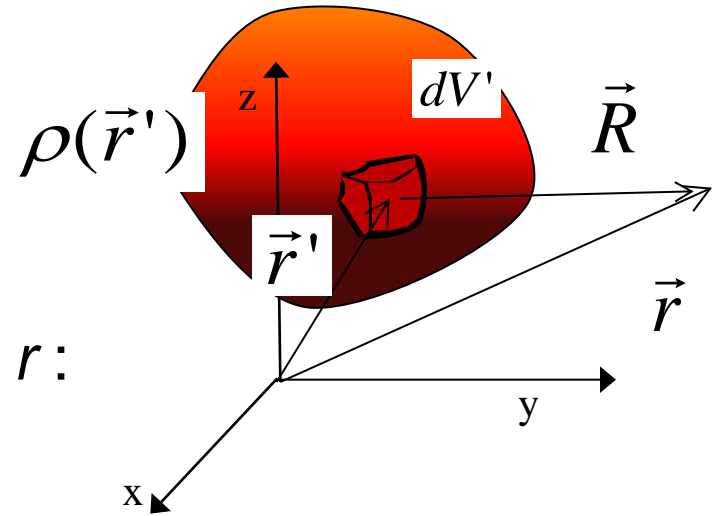
- Distribució arbitrària i finita de càrrega.
- El potencial que crea en punts  $r$ :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'$$

- Suposarem la distribució prop de l'origen i el càlcul del potencial fora de la distribució.

- Desenvolupant en sèrie de Taylor:

- vector  $r'$  (punts font) menut ( $r' \sim 0$ ).
- vector  $r$  (punt camp) gran ( $r$ )



$$\left. \begin{array}{l} - \text{vector } r' \text{ (punts font) menut } (r' \sim 0). \\ - \text{vector } r \text{ (punt camp) gran } (r) \end{array} \right\} r' \ll r$$

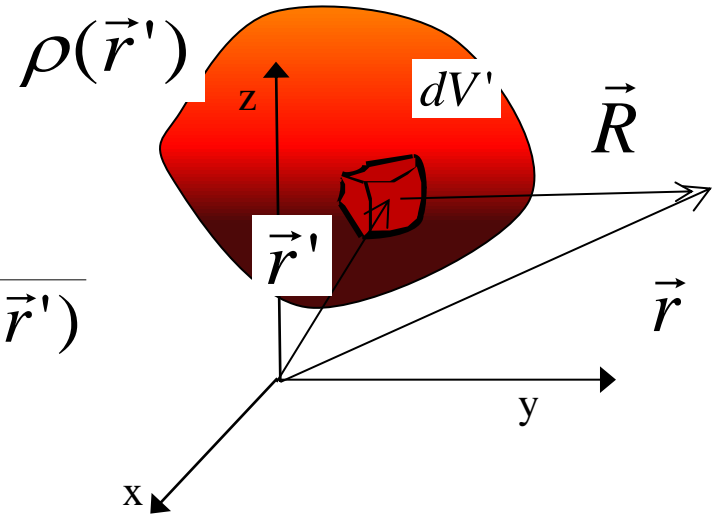
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Desenvolupament

- Recordem que:

$$\begin{aligned} R &= |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= r \sqrt{\underbrace{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}_x} \end{aligned}$$



$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

- Desenvolupant en sèrie de Taylor (només  $O(r')$  i  $O(r'^2)$ ):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 \cdot r'^2}{r^5} + \dots$$

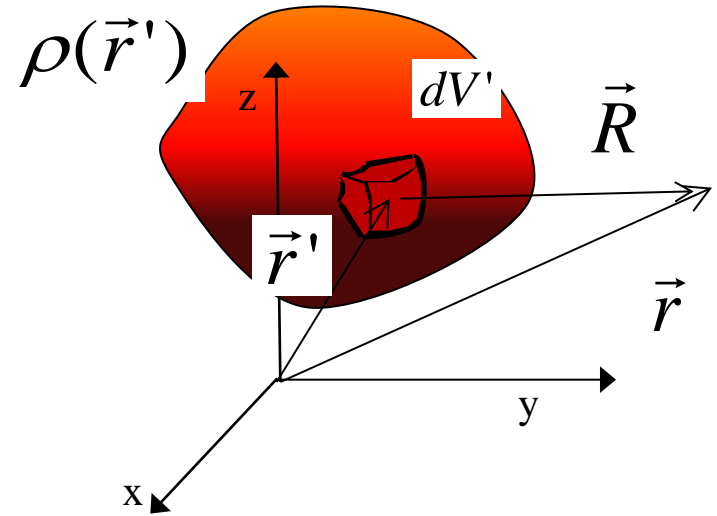
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Desenvolupament

- Introduït en l'expressió del potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \cong$$



$$\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left[ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 \cdot r'^2}{r^5} + \dots \right] dV'$$

- El desenvolupament & dóna lloc a una sèrie de termes:

$$\phi(\vec{r}) \cong \phi^{(1)}(\vec{r}) + \phi^{(2)}(\vec{r}) + \phi^{(3)}(\vec{r}) + \dots$$

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

1r terme = terme monopolar

$$\phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- S'obté en traure  $r$  de la integral:

$$\phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- On  $Q_T$  és la càrrega total de la distribució:  $Q_T = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV'$
- El 1r terme representa el potencial que produiria una càrrega puntual  $Q_T$  situada en l'origen. Depèn de  $1/r$ .
- $Q_T$  s'anomena *moment elèctric d'ordre zero* o *monopolar* i és un escalar.

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

2n terme = terme dipolar

$$\phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- S'obté en operar en la integral:

$$\phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- On hem definit el moment dipolar de la distribució:

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

- El 2n terme representa el potencial que produiria un dipol de valor  $\mathbf{p}$  en l'origen de coordenades. Depèn de  $1/r^2$ .
- $\mathbf{p}$  s'anomena *moment elèctric d'ordre u* o *moment dipolar* i és un vector.



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

3n terme = terme quadrupolar

- S'obté en operar en la integral:

$$\phi^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \int_{V'} \left( 3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 \right) \rho(\vec{r}') dV' =$$

9 termes

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j}{2} \int_{V'} \left( 3(x'_i \cdot x'_j) - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\vec{r}') dV' =$$

Cada terme, una integral

$$\phi^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j Q_{ij}$$

Tensor de 2n ordre  
amb 9 components

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

- On hem definit el MOMENT QUADRUPOLAR de la distribució com:

$$Q_{ij} = \int_{V'} \left( 3(x'_i \cdot x'_j) - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\vec{r}') dV'$$

- Essent:

$$x_1 = x$$

$$x'_1 = x'$$

$$\delta_{ii} = 1$$

$$x_2 = y$$

$$x'_2 = y'$$

$$\delta_{ij(i \neq j)} = 0$$

$$x_3 = z$$

$$x'_3 = z'$$

$$\begin{aligned} r' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} = \\ &= (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Delta de  
Kronecker

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### Termes

- PROPIETATS del tensor quadrupolar.
- La suma dels elements de la diagonal és zero (només 2 independents):

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + Q_{z,z} = 0$$

- És un tensor simètric (només 3 independents):

$$Q_{i,j} = Q_{j,i} \quad (i \neq j)$$

$$Q_{i,j} = \begin{pmatrix} Q_{x,x} & Q_{y,x} & Q_{z,x} \\ Q_{x,y} & Q_{y,y} & Q_{z,y} \\ Q_{x,z} & Q_{y,z} & Q_{z,z} \end{pmatrix}$$

- En definitiva: només 5 components independents

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

- Per tant, el 3r terme = terme quadripolar:

$$\phi^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j Q_{ij}$$

- On  $Q_{i,j}$  és el moment quadripolar:

$$Q_{ij} = \int_{V'} \left( 3(x'_i \cdot x'_j) - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\vec{r}') dV'$$

- El 3r terme representa el potencial que produiria un quadripol  $Q_{i,j}$  en l'origen de coordenades. Depèn de  $1/r^3$ .
- $Q_{i,j}$  s'anomena *moment elèctric d'ordre dos* o *quadripolar* i és un tensor d'ordre 2.

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Desenvolupament multipolar i notació $x_i$

- Vegeu pàg. 559 de:

*Essential Mathematic Methods for Physicists*

H. J. Weber, F. Harris, G. B. Arfken, Academic Press  
(2003)

[http://books.google.com/books?id=k046p9v-ZCgC&pg=PA559&lpg=PA559&dq=electric+potential+expansion+%22quadrupole+term%22&source=bl&ots=CaT5NkILz8&sig=oTck8S9uZdsV-PtR0KQYiSNYHic&hl=es&ei=p92VTomzKerl4QSDotWtCA&sa=X&oi=book\\_result&ct=result&resnum=5&sqi=2&ved=0CEEQ6AEwBA#v=onepage&q=electric%20potential%20expansion%20%22quadrupole%20term%22&f=false](http://books.google.com/books?id=k046p9v-ZCgC&pg=PA559&lpg=PA559&dq=electric+potential+expansion+%22quadrupole+term%22&source=bl&ots=CaT5NkILz8&sig=oTck8S9uZdsV-PtR0KQYiSNYHic&hl=es&ei=p92VTomzKerl4QSDotWtCA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&sqi=2&ved=0CEEQ6AEwBA#v=onepage&q=electric%20potential%20expansion%20%22quadrupole%20term%22&f=false)

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

- Jerarquia dels tres primers termes:

$$\phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \phi^{(3)}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i,j=1}^3 x_i \cdot x_j Q_{ij}}{r^5}$$

Ordre:	(n = 0)	(n = 1)	(n = 2)
	1/r <sup>1</sup>	1/r <sup>2</sup>	1/r <sup>3</sup>

- Termes superiors: ordre  $n = 3, 4, 5 \dots$
- El corresponent potencial varia amb  $1/r^{(n+1)}$ .
- Nom:  $2^n$  - polars ( $n = 3, 4, 5 \dots$ ) (octupol, hexapol...)

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Termes

- Es pot veure la jerarquia dels tres primers termes:

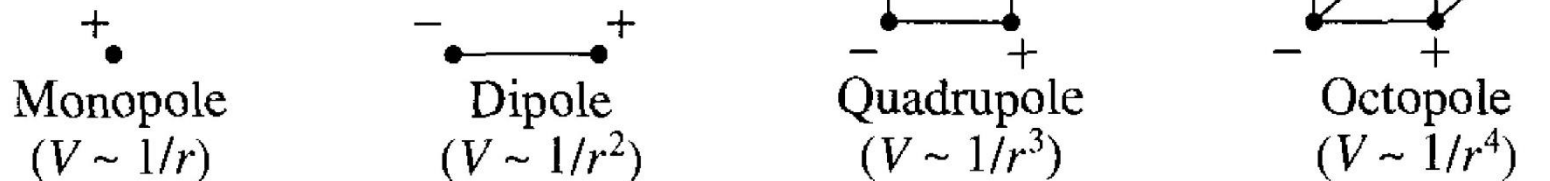


Figure 3.27

*Griffiths, D. J. Introduction to Electrodynamics. Prentice Hall.1989; Fig. 3.27 3<sup>a</sup> Ed.*

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

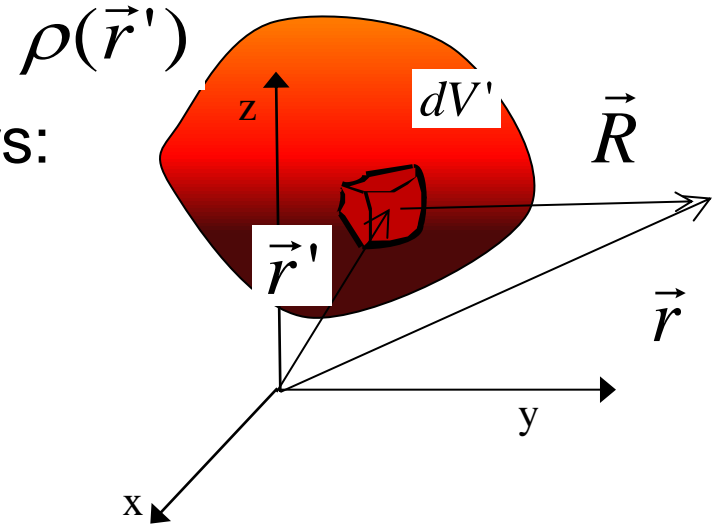
### Termes

- Resum de moments multipolars:

$$Q_T = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

$$Q_{ij} = \int_{V'} \left( 3(x'_i \cdot x'_j) - (r')^2 \delta_{ij} \right) \rho(\vec{r}') dV'$$



Si dist. superficial o lineal: integrals de superfície o de línia.

Si la càrrega total de la distribució és zero, el moment dipolar **és una característica pròpia** (independent de l'origen).



# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

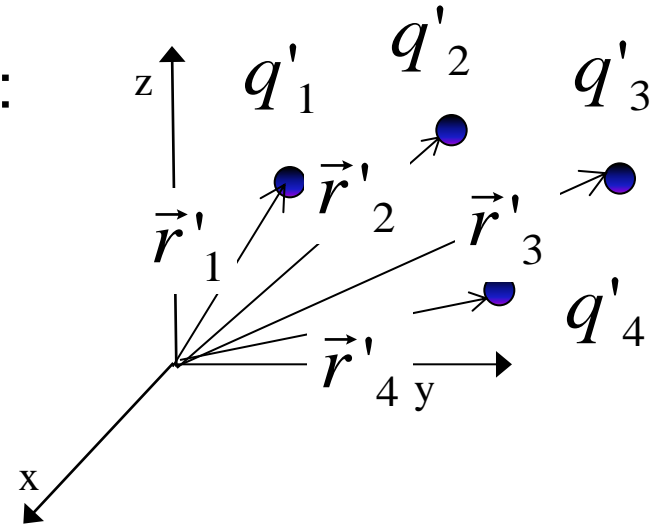
### Termes

- Per a un conjunt de  $q$  PUNTUALS:

$$Q_T = \sum_{m=1}^{m=N} q'_m$$

$$\vec{p} = \sum_{m=1}^{m=N} \vec{r}'_m q'_m$$

$$Q_{ij} = \sum_{m=1}^{m=N} \left( 3(x'_{i_m} \cdot x'_{j_m}) - (r'_m)^2 \delta_{ij} \right) dq'_m \quad (i, j \rightarrow x, y, z)$$



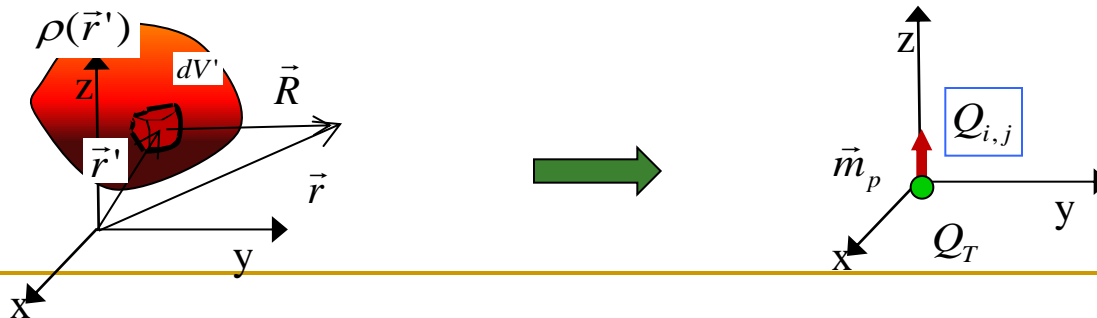
Si la càrrega total del conjunt de càrregues és zero, el moment dipolar **és una característica pròpia** de com estan distribuïdes les càrregues puntuals (independent de l'origen).

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic

### Importància del desenvolupament del potencial

- Interpretació física sobre la base del principi de superposició.
- Se substitueix el problema de calcular el potencial creat per una distribució en una regió finita pel...
- ... creat per un conjunt d'elements puntuals (càrrega puntual  $Q_T$ , dipol puntual  $p$ , quadrupol puntual  $Q_{i,j}$ , ...)
- Les contribucions són de magnitud decreixent: es pot tallar de forma raonable en un nombre menut de termes.



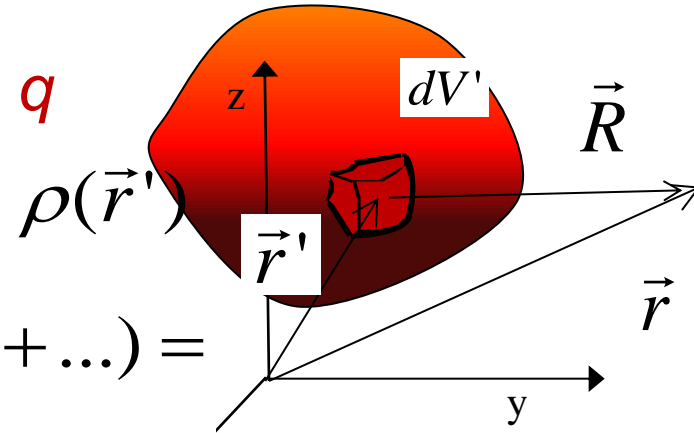
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### CAMP ELÈCTRIC de la distribució de $q$

- Derivant:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi = -\vec{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \dots) = \\ &= \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(3)} + \dots\end{aligned}$$



- Els dos primers termes:

- camp d'una càrrega  $Q_T$  en l'origen

$$\vec{E}^{(1)} = -\vec{\nabla} \phi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

- camp d'un dipol  $\vec{p}$  en l'origen

$$\vec{E}^{(2)} = -\vec{\nabla} \phi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p} r^2}{r^3}$$

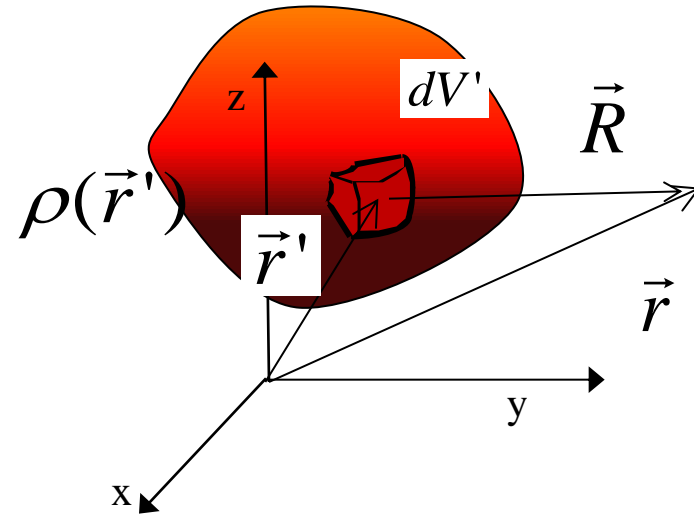
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### EFFECTE de l'origen de coordenades

- Distribució finita descrita pels seus multipols elèctrics:

$$\phi(\vec{r}) = \phi^{(1)}(\vec{r}) + \phi^{(2)}(\vec{r}) + \phi^{(3)}(\vec{r}) + \dots$$



- El primer terme és un escalar: és invariant davant un canvi de coordenades.
- Els altres termes, en principi, depenen de l'origen de coordenades.

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### EFFECTE de l'origen en el potencial

- Si considerem una translació de l'origen:  $\tilde{\vec{r}}' = \vec{r}' + \vec{d}_{o\tilde{o}}$

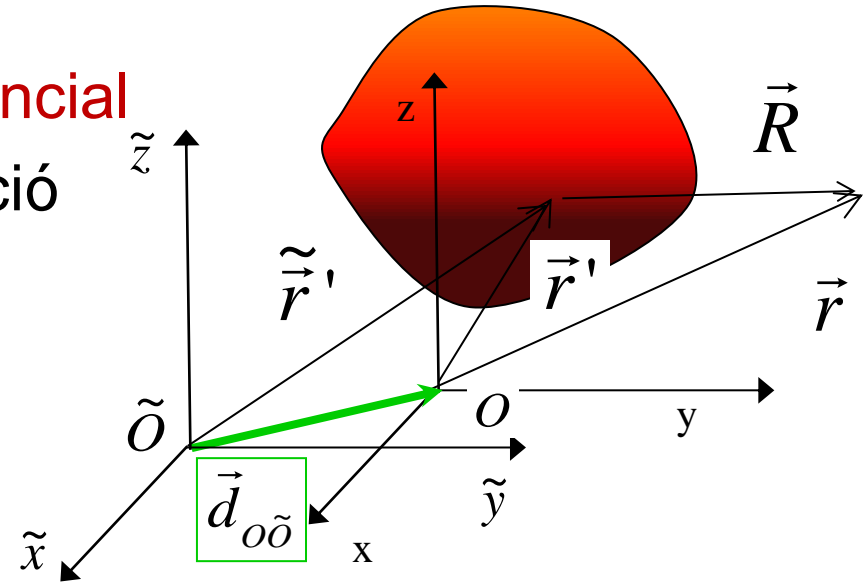
- El terme dipolar:

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

- Es pot demostrar que:

$$\tilde{\vec{p}} = \vec{p} + \vec{d}_{o\tilde{o}} \cdot Q_T$$

- Si la càrrega total és zero, el moment dipolar no depèn del sistema de referència. És invariant enfront d'una translació.



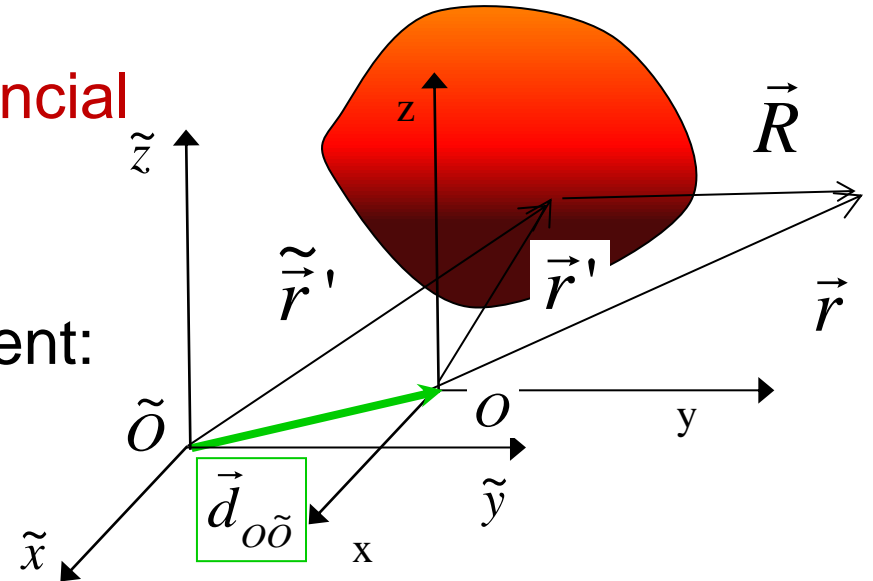
# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### EFFECTE de l'origen en el potencial

- Si la càrrega NO és zero, podem fer zero el moment dipolar amb un desplaçament:

$$\vec{d}_{o\tilde{o}} = -\frac{\vec{p}}{Q_T}$$



RESUM, triant adequadament el sistema de coordenades, podem obtenir una bona aproximació del potencial:

- Si la càrrega total és zero, podem fer zero el moment quadrupolar: el terme dipolar és una bona aproximació.
- Si la càrrega NO és zero, podem fer zero el moment dipolar: el terme monopolar és una bona aproximació.

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### Representació mitjançant càrregues equivalents

- Podem calcular una càrrega positiva i una altra de negativa que representen la distribució de càrrega com:

$$Q_{T+} \equiv \int_{V'} \rho_+(\vec{r}') dV' \quad Q_{T-} \equiv \int_{V'} \rho_-(\vec{r}') dV'$$

- Igualment, podem definir centres de càrrega positiu i negatiu com

$$c\vec{d}q_+ \equiv \vec{r}_+ \equiv \frac{\int_{V'} \vec{r}' \rho_+(\vec{r}') dV'}{\int_{V'} \rho_+(\vec{r}') dV'} \quad c\vec{d}q_- \equiv \vec{r}_- \equiv \frac{\int_{V'} \vec{r}' \rho_-(\vec{r}') dV'}{\int_{V'} \rho_-(\vec{r}') dV'}$$

# Tema 3: DESENVOL. MULTIPOLAR

## 3.3. Desenvolupament multipolar del camp electrostàtic

### Representació mitjançant càrregues equivalents

- Si la càrrega total és zero ( $Q_{T+} = -Q_{T-}$ ), aleshores el moment dipolar:

$$\vec{p} \equiv Q_{T+} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

- És com si tinguérem les càrregues  $Q_{T+}$  i  $Q_{T-}$  concentrades en dos punts separats una distància  $\vec{r}_+ - \vec{r}_-$
- Semblant a un dipol, encara que poden existir moments multipolars superiors.