Tema 1: INTRODUCCIÓ A L'ELECTROMAGNETISME

1.0. Càlcul vectorial
1.1. La interacció electromagnètica en la física
1.2. Càrregues i corrents
1.3. La conservació de la càrrega. Equació de continuïtat
1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

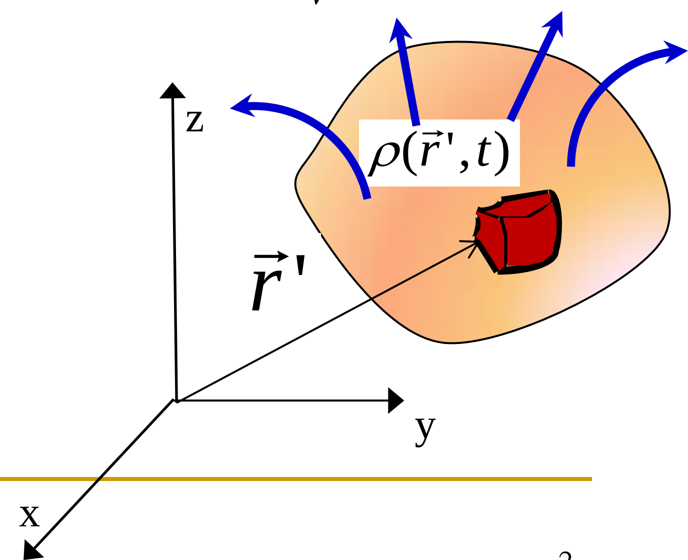
1.3. La conservació de la càrrega. Equació d... conti...

Principi: axioma que no es deriva d'una altra llei

Equació de continuïtat (o principi conservació de la càrrega)

- Principi experimental: *La càrrega ni es crea ni es destrueix.*
- Densitat de càrrega ρ(r',t) en un volum *V'* (superfície que l'envolta *S'*):
  - t = 0: càrrega total en *V'*: $Q_V(t=0) = Q_0 = \int_{V'} \rho(\vec{r}\,',0)\, dV'$
  - t > 0: $Q_V(t) + Q_{ext}(t) = Q_0$
- Derivant respecte del temps:

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} + \frac{dQ_{ext}(t)}{dt} = \cancel{\frac{dQ_0(t)}{dt}}$$



TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.3. La conservació de la càrrega. Equació de continuïtat

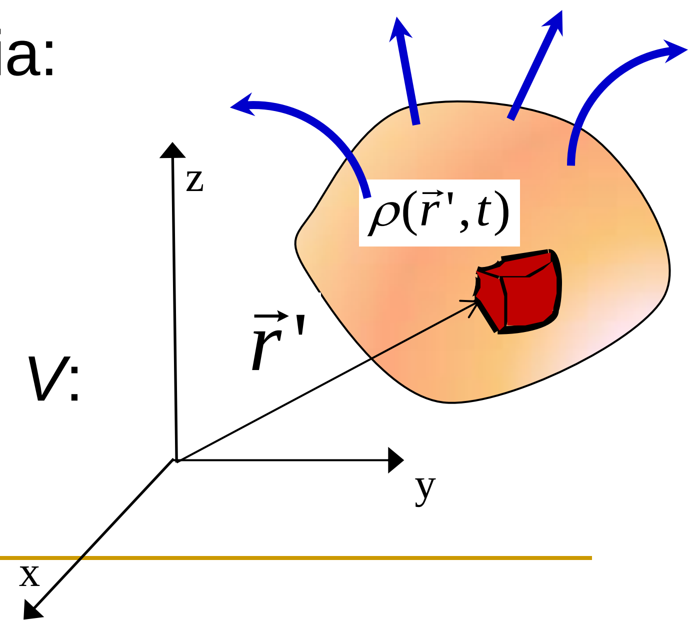
Equació de continuïtat (o de conservació de la càrrega)

- 1r terme: $$\frac{dQ_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V'} \rho(\vec{r}\,',t)\, dV' = \int_{V'} \frac{d\rho(\vec{r}\,',t)}{dt}\, dV'$$
- 2n terme: $$\frac{dQ_{ext}(t)}{dt} = I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{S'} = \int_{S'} \vec{J}\, d\vec{S}\,'$$
- Substituint i aplicant el t. divergència:

$$\int_{V'} \frac{d\rho(\vec{r}\,',t)}{dt}\, dV' + \int_{V'} \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dV' = 0$$

- Com que es pot aplicar a qualsevol *V*:

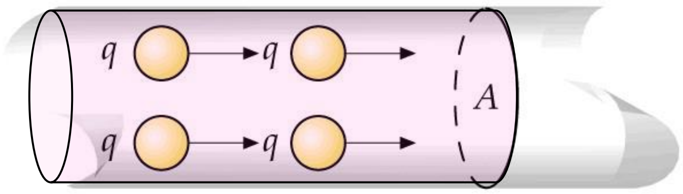
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$ ***Eq. continuïtat***



TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

Fig. 25.01 Tipler 5ª Ed.

1.3. La conservació de la càrrega. E



Significat físic

- *La càrrega ni es crea ni es destrueix, només es mou.*
- Aparents violacions del principi:
  - La creació/recombinació de parells electró-forat
  - La creació/aniquilació de parells electró-positró
- Balanç net de càrrega no canvia: conservació de *Q*

Corrents estacionaris

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

... substituint en l'eq. de continuïtat, obtenim: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

... no hi ha acumulació de *q*: *I(est.)* són solenoïdals

- Cas particular: corrent CC (DC) $\vec{J} \neq \vec{J}(t)$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

Demostració en

W.K.H.Panofsky & M.Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd. ed., Addison-Wesley, Reading, Massachussets (1962), p. 2-5.)

Universidad de Sevilla: www.esi2.us.es/DFA/CEMI/Teoria/Tema1.pdf

- Un camp vectorial $\vec{F}$ està unívocament determinat
  > per la seua divergència ($\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$, fonts escalars)
  > per el seu rotacional ($\vec{\nabla}\times\vec{F}$, fonts vectorials)

Si: - ambdós són coneguts en tots i cada un dels punts de l'espai,
- si $\vec{F}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ i $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ tendeixen a zero en l'infinit suficient-ment apresa (almenys: $\vec{F}$ com a r^{-1}; $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ i $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ com a r^{-2})

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

Exemple algebraic

- Donat un vector ***r*** desconegut, un vector ***a*** conegut, i suposats també coneguts els productes escalar (*b*) i vectorial (***c***)

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \qquad \vec{a}\cdot\vec{r} = b \qquad \vec{a}\times\vec{r} = \vec{c}$$

- Es pot comprovar que tenim 3 incògnites (x,y,z) i 4 equacions (1 del prod. escalar i 3 del prod. vectorial)
- Per tant, el problema està aparentment sobrecondicionat.

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

Exemple algebraic

$z = b/a$

- Si el vector ***a*** només té component *z*: $\vec{a} = a\vec{u}_z$

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = b \quad \rightarrow \quad az = b$$

$y = -c_x/a$ $\quad x = c_y/a$

$$\vec{a} \times \vec{r} = \vec{c} \quad \rightarrow \quad -ay\vec{u}_x + ax\vec{u}_y + 0 = c_x\vec{u}_x + c_y\vec{u}_y + c_z\vec{u}_z$$

- Es poden calcular els components *x,y,z* a partir de *b* i dels components de ***c***.

- PERÒ...: la 4a equació imposa una condició a *c*: $c_z = 0$
(*c* no pot ser qualsevol vector).

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

Exemple algebraic

- Quan ho apliquem als camps electromagnètics: la condició que imposa l'equació addicional donarà alguna contradicció que faça que no existisca solució?

- En la determinació unívoca d'un camp vectorial, coneixent la divergència i el rotacional, el paper del vector $\boldsymbol{a}$ el fa l'operador nabla.

- Aleshores, el problema no està cobrecondicionat perquè, a causa de les característiques pròpies de l'operador nabla, la condició imposada la compleix.

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. T. Helmholtz

ENUNCIAT DEL TEOREMA DE HELMHOLTZ

- Si d'un camp desconegut ***F*** es coneixen:

  fonts escalars: $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})=\rho(\vec{r})$

  fonts vectorials: $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})=\vec{c}(\vec{r}) \qquad \left(\rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{c}(\vec{r})=0\right)$

- Aleshores, ***F*** es pot calcular com:

$$\vec{F}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\cdot\phi(\vec{r})+\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$$

- essent $\phi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Re 3}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV' \qquad \vec{A}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Re 3}\frac{\vec{c}(\vec{r}\,')}{R}dV'$

$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$

Potencial escalar | Potencial vector

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

- Cas sorprenent: encara que es tenen 4 equacions i 3 incògnites (F_x, F_y, F_z), el problema no està sobre-condicionat, ateses les propietats de l'operador ∇.
- El teorema és constructiu: no sols garanteix l'existència de la solució, sinó que la dóna de forma explícita.
- Estableix l'estructura general dels camps vectorials com la suma d'una part irrotacional ($-\vec{\nabla} \cdot \phi(\vec{r})$) i una part solenoïdal ($\vec{\nabla} \times \vec{c}(\vec{r})$).
- Importància per a l'EM: garanteix l'existència i la unicitat de la solució de les equacions de Maxwell.