Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAGNÈTICA

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

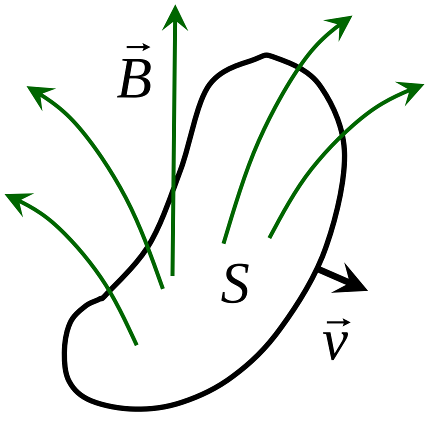
CIRCUITS EN MOVIMENT

GENERALITZACIÓ DE LA LLEI DE FARADAY-LENZ

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma integral



- Suposarem que el circuit es mou amb velocitat *v* al si d'un camp magnètic variable *B*(*r*,*t*)
- Hem d'avaluar la variació de flux.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}\right]$$

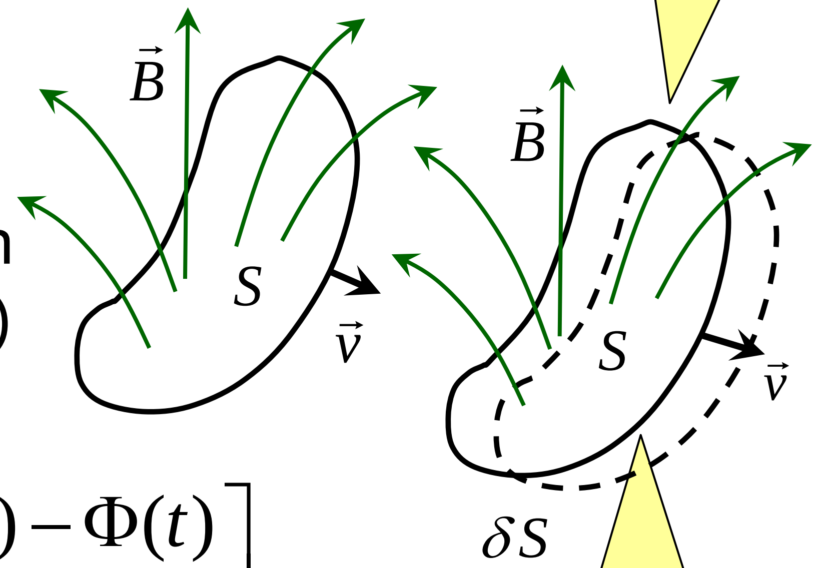
– En l'instant *t*: $\Phi(t) = \int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}$

Moviment cap el fons, no paral·lel

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma integral

- Suposarem que el circuit es mou amb velocitat *v* al si d'un camp magnètic variable *B*(*r*,*t*)
- Hem d'avaluar la variació de flux.



$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}\right]$$

δS = àrea de la cinta lateral

- En l'instant *t*: $\Phi(t) = \int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}$
- En l'instant *t*+*Δt*: $\Phi(t+\Delta t) = \int_{S+\delta S} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}$

Flux a través de S
Flux a través de cinta lateral

$$= \int_S \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S} + \int_{\delta S} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}$$

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma integral

- Per tant, el numerador de la variació del flux:

$$\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)=\int_S \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}+\int_{\delta S} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}-\int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}$$

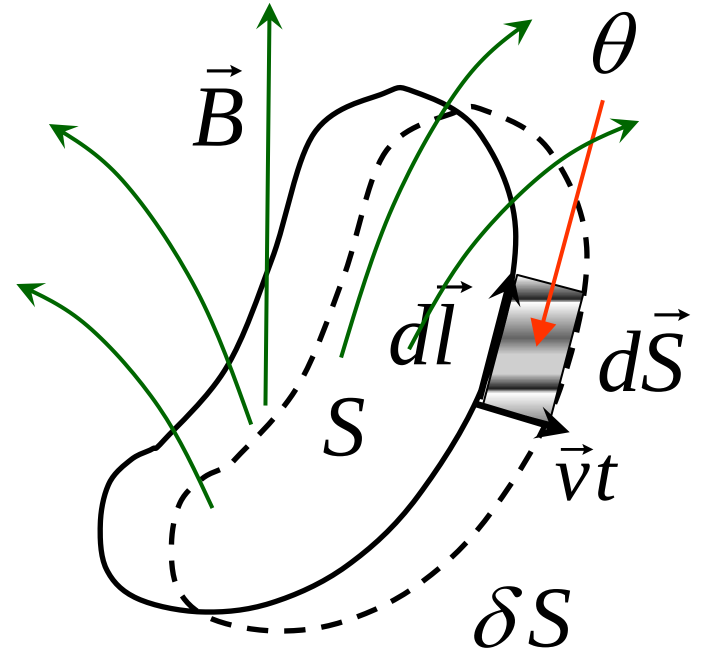
$$=\left(\int_S \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}-\int_S \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}\right)+\int_{\delta S} \vec{B}(t+\Delta t)\cdot d\vec{S}$$

- En avaluar el límit, <u>el primer terme</u> dóna lloc a la derivada de *B*:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{S(C)}\left(\frac{\vec{B}(t+\Delta t)-\vec{B}(t)}{\Delta t}\right)\cdot d\vec{S}=\int_{S(C)}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

Tema 7: INDUCCIÓ ELEC

7.4. Inducció en un circuit en movime



Generalització: forma integral

- En avaluar el límit, <u>el segon terme</u> dóna lloc a la següent integral:

$$\boxed{d\vec{S} = \vec{v}\Delta t \times d\vec{l}}$$

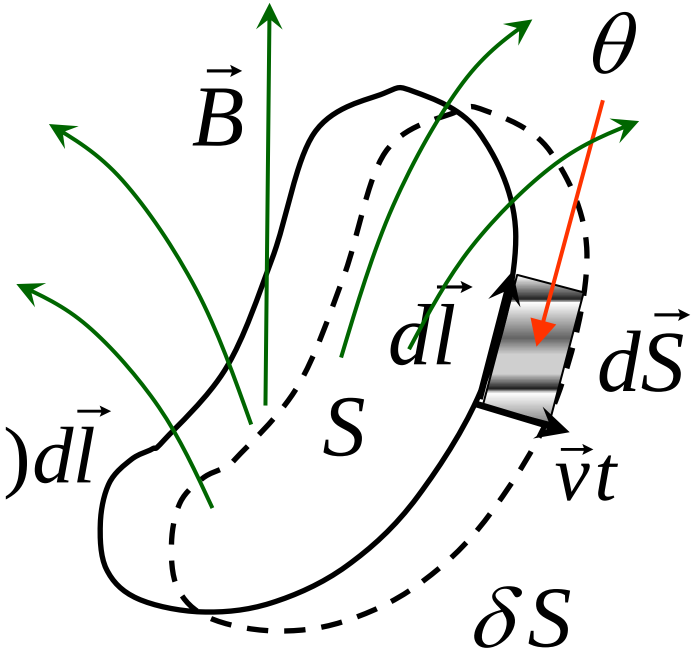
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\delta S} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_C \vec{B} \cdot \left(\vec{v}\Delta t \times d\vec{l} \right) =$$

$$= - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_C (\vec{v}\Delta t \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- on $d\,S$ és l'element d'àrea de la cinta lateral δS

Tema 7: INDUCCIÓ ELEC

7.4. Inducció en un circuit en movime



Generalització: forma integral

- Així: $$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{C(S)} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

- Primer terme:

  − variació del flux a través de *S* entre *t* i *t* + *Δt*

  − és deguda a la variació temporal de *B* (bé perquè canvia amb *t*, bé perquè canvia en desplaçar-se)

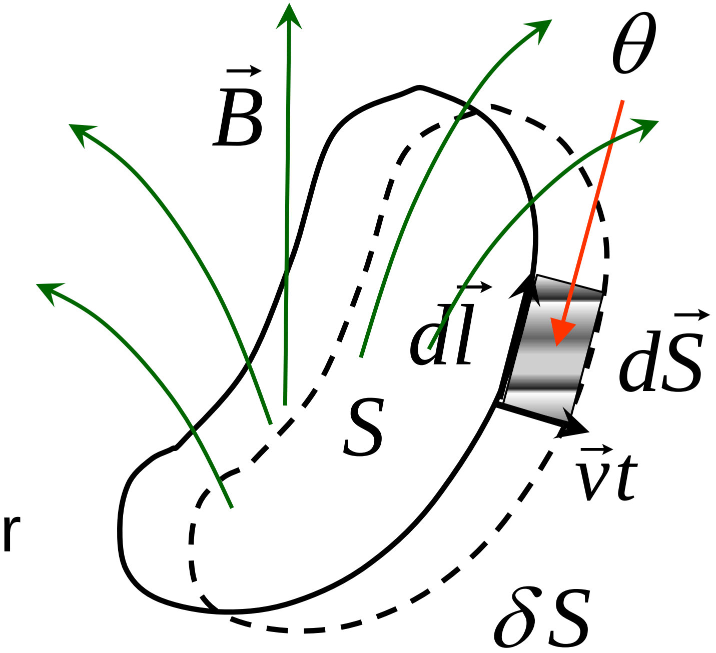
- Segon terme:

  − flux a través de la cinta lateral *δS*

  − és degut al desplaçament de l'espira amb velocitat *v*

Tema 7: INDUCCIÓ ELE(

7.4. Inducció en un circuit en movime

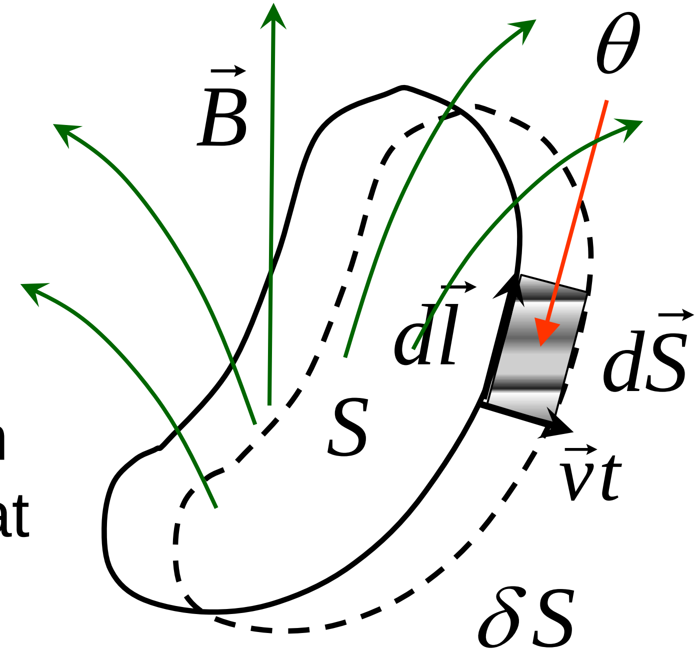


Generalització: forma integral

- El segon terme: $\oint (\vec{v}\times\vec{B})d\vec{l}$
  - (***v*** × ***B***) és la força de Lorentz per unitat de càrrega deguda a ***v***
  - la integral és un treball per unitat de càrrega; és una força electromotriu
  - contribueix al camp electromotor creat per $\partial B/\partial t$, ambdós "espenten" els portadors de càrrega en l'espira
  - aplicant el teorema de la circulació:

$$\oint_{C(S)} (\vec{v}\times\vec{B})d\vec{l} = \int_{S(C)} \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}$$

7.4. Inducció en un circuit en movime



Generalització: forma integral

- La força electromotriu induïda en un circuit que es desplaça amb velocitat *v* al si d'un camp magnètic variable, en funció de *B* i *v*:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{S(C)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{S}$$

Generalització de la Llei de Faraday-Lenz

Variació del flux deguda a la dependència temporal de B

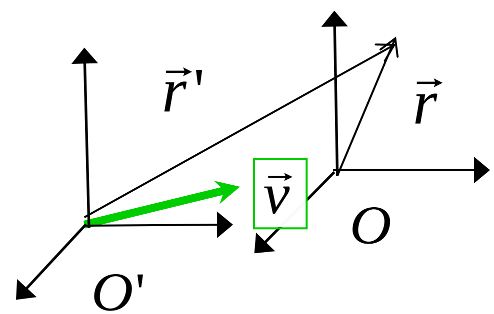
Variació del flux originada pel moviment relatiu entre circuit i camp B

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma diferencial

- Havent-hi moviment, per a generalitzar la llei de *F-L* en forma diferencial, necessitem concretar els sistemes de referència:
  - *O*' sistema solidari amb el circuit
  - *O* sistema laboratori
  - *O*' es mou amb velocitat v respecte de *O*



- Analitzarem la força electromotriu mesurada per cada observador. Aquesta ha de ser la mateixa, ja que és la que impulsa els portadors de càrrega.

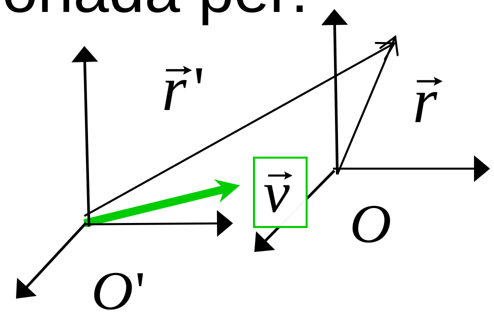
Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma diferencial

- En el sistema *O* del laboratori, un observador veurà un camp induït *E* i una força electromotriu donada per:

$$\varepsilon = -\int_{S(C)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{S}$$



- En el sistema *O'*, un observador solidari amb el circuit observarà un camp induït *E'* i una força electromotriu donada per:

$$\varepsilon = \oint_{C(S)} \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_{S(C)} \vec{\nabla} \times \vec{E}' \cdot d\vec{S}$$

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

¡ Magnituds en diferents sistemes de referència!

Generalització: forma diferencial

- La igualtat ha de donar-se per qualsevol circuit; per tant:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

- Per relacionar *E* i *E* ’:

− per a l’observador en *O’*, la força de Lorentz que actua sobre les càrregues és:

$$\vec{F}' = q\vec{E}' + 0$$

− per a l’observador del laboratori en *O*, la força de Lorentz que actua sobre les càrregues és:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma diferencial

- Com que són forces inercials: *F* = *F* ’. Per tant, els camps elèctrics són diferents:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

Camp elèctric induït, vist en el sistema O’ (circuit)

Camp elèctric induït, vist en el sistema O (laboratori)

- Observem que el camp elèctric induït depèn del sistema de referència i els valors en cada sistema estan relacionats a través de la velocitat *v*.

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma diferencial

- Si expressem el rotor només en funció de magnituds del sistema *O*:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \cancel{\vec{v} \times \vec{B}}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \cancel{\vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

- Observem que l'expressió és la mateixa que en el sistema *O*' (circuit en repòs).

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Generalització: forma diferencial

- Per tant, la forma diferencial de l'equació de Faraday-Lenz no depèn del sistema de coordenades:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Els camps elèctrics induïts en cada sistema són diferents, però relacionats a través de la velocitat:

$$\vec{E}' \qquad\qquad \vec{E} \qquad\qquad (\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B})$$

- De tal manera que les forces electromotrius induïdes són iguals.

Tema 7: INDUCCIÓ I

7.4. Inducció en un circuit en r

$$\varepsilon = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \cdot d\vec{S}$$

Interpretació del cas magnetostàtic: *B = B(r)*, ∂B/ ∂t=0)

- Quan el circuit es desplaça amb **velocitat *v*** al si d'un **camp magnetostàtic**, l'observador lligat al laboratori observarà càrregues que es mouen amb velocitat *v* i una força electromotriu associada a la força de Lorentz:

$$\varepsilon = \oint_{C(S)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- En canvi, l'observador lligat al circuit (*v* = *0*) veu un camp magnètic que canvia amb el temps i una força electromotriu conseqüència d'aqueixa variació:

$$\varepsilon = -\oint_{C(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

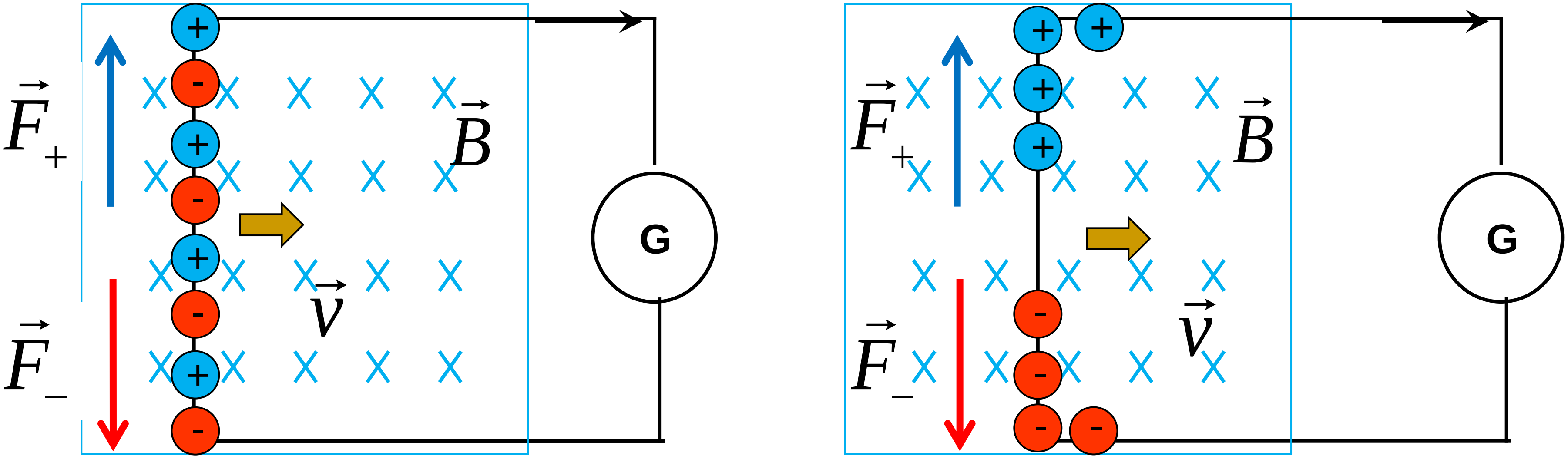
Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Interpretació del cas magnetostàtic: *B = B(r)*, ∂B/ ∂t=0)

- Efecte de la força de Lorentz (si càrregues + i -):

  separació de càrregues = generador



Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

Forma diferencial de l’eq. Faraday-Lenz $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- La forma diferencial de l’equació de Faraday-Lenz ens informa que un camp magnètic variable amb el temps genera un camp elèctric induït no conservatiu i la font de rotor és aqueixa variació.
- La forma diferencial de l’equació de Faraday-Lenz és més general que la integral: no fa referència a un circuit.
- Aqueixa expressió no depèn del sistema de referència o del moviment del circuit dins del camp magnètic. Einstein es va basar en aquest aspecte per elaborar la teoria de la relativitat.

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.4. Inducció en un circuit en moviment

EXEMPLES

- 1. Càlcul de la *fem* induïda sobre una espira de radi *a* i resistència *R* quan es troba en presència d'un camp magnètic variable en la forma

$$\vec{B} = B_z(t)\,\vec{u}_z \qquad\qquad B_z(t) = B_0 e^{-t/\tau}$$

- 2. Càlcul de la *fem* induïda sobre una espira quadrada de costats *a* i *b* que gira amb velocitat angular constant *ω* en presència d'un camp magnètic uniforme *B:*

$$\vec{B} = B_0\,\vec{u}_x$$

COEFICIENTS D'INDUCCIÓ

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

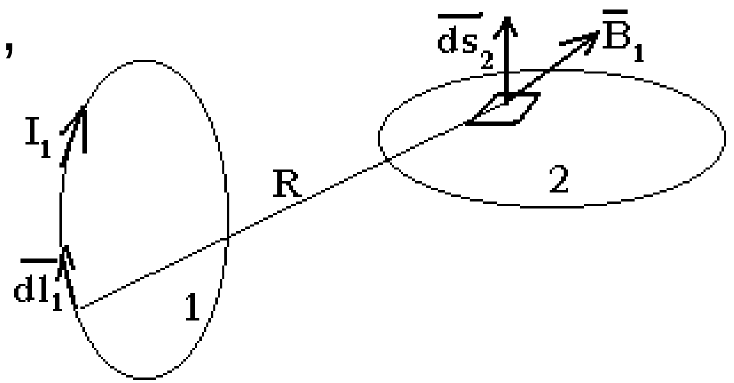
Coeficients d'inducció entre dos circuits

- L'ús dels coeficients d'inducció permet simplificar el càlcul de la *fem* induïda en un circuit.
- Idea bàsica per a definir-los:
  - En l'expressió del flux magnètic que travessa un circuit, se separa el corrent que crea el camp de la resta d'elements.
  - Aqueixos elements, que bàsicament estan relacionats amb la geometria del circuit i les propietats del material, constitueixen el coeficient d'inducció.
- Tipus de coeficients: autoinducció i inducció mútua.

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Coeficients d'inducció entre dos circuits



- Suposem dos circuits en repòs, recorreguts per corrents I_1 i I_2.
- B_1 és el camp magnètic creat per el circuit 1.
- El flux del camp magnètic B_1 que travessa el circuit 2 és:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2$$

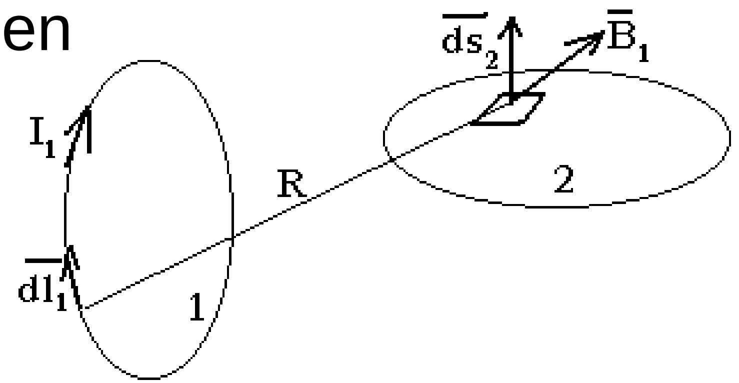
- En funció del potencial vector i aplicant el t. Stokes

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \nabla \times \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

7.5. Coeficients d'inducció

Coeficients d'inducció **mútua** entre dos circuits

- Expressant el potencial vector en funció del corrent i substituint:



$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1}{R}$$

$$\Phi_{21} = \oint_{C_2}\vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{C_2} d\vec{l}_2 \oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1}{R} = M_{21} I_1$$

- On: $$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2} d\vec{l}_2 \oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1}{R}$$ *Coeficient d'inducció **mútua***

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Fórmula de Neumann per als coeficients d'inducció mútua

- És a dir:

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \qquad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{R}$$

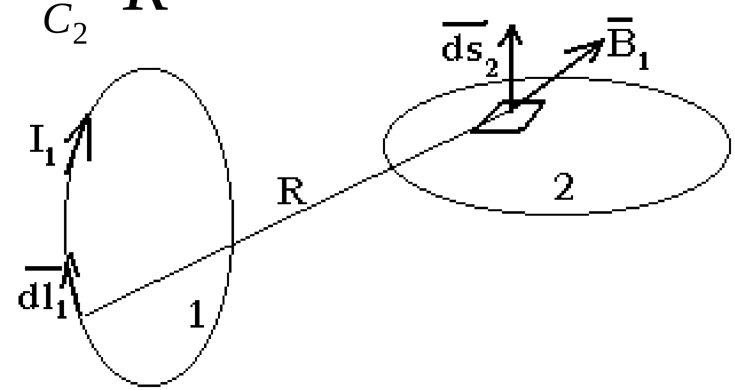
- De forma equivalent:

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2 \qquad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2}{R}$$

***Fórmules de Neumann** per als coeficients d'inducció mútua*

- Per a un medi lineal, donada la simetria:

$$M_{21} = M_{12}$$



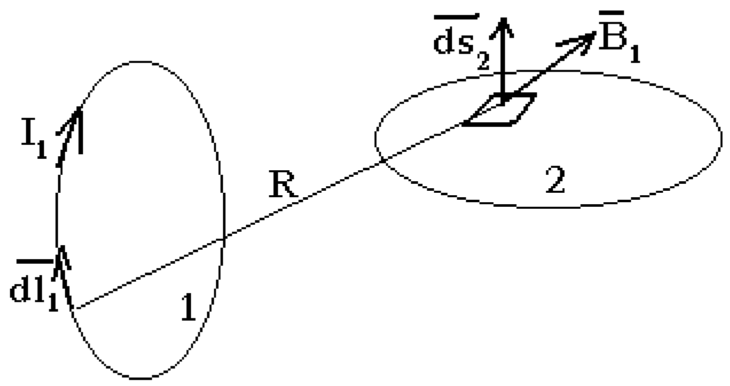
Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Fórmula de Neumann per als coeficients d'inducció

- El coeficient d'inducció mútua depèn només de la geometria dels circuits i de la seua posició relativa.
- Si es coneix el coeficient M_{ij}, es pot determinar de forma directa el flux Φ en funció del corrent I.
- El signe de M_{ij}, és arbitrari, per la qual cosa només s'utilitza el seu mòdul.
- Unitats de M_{ij} en el SI:

  1 henry = 1 weber / 1 ampere.



Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

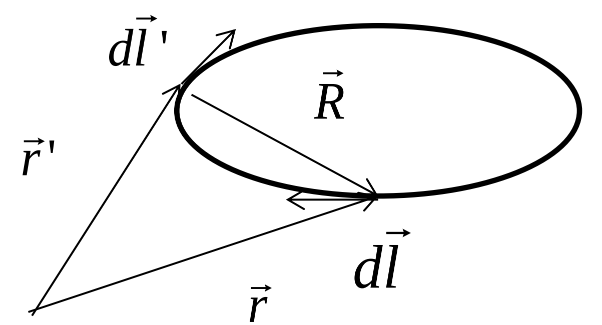
Coeficient **d'autoinducció**

- Considerem un únic circuit pel qual passa un corrent *I*.
- Si *B* és el camp que crea en tot l'espai, el flux que el travessa és:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\vec{l} \oint_C \frac{d\vec{l}\,'}{R} = L\, I$$

- On *L* és el coeficient d'autoinducció

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C d\vec{l} \oint_C \frac{d\vec{l}\,'}{R}$$



Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Coeficient d'autoinducció

- El coeficient d'autoinducció representa el coeficient d'inducció mútua d'un circuit sobre si mateix.
- El coeficient d'autoinducció depèn només de la geometria del circuit.
- Si es coneix el coeficient d'autoinducció L, el flux Φ que travessa un circuit es pot determinar de forma directa mitjançant: $\Phi = L \cdot I$.
- El signe del coeficient d'autoinducció L és sempre positiu.
- Unitats de L en el SI: 1 henry = 1 weber / 1 ampere.

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Coeficient d'autoinducció

- NOTA: la fórmula de Neumann no és útil per a calcular el coeficient *L*:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C d\vec{l} \oint_C \frac{d\vec{l}\,'}{R}$$

> Quan coincideixen *dl* i *dl'*, la distància entre aquests és zero (R = 0) i la integral es fa divergent.

> Per aquest motiu, és més habitual calcular primer el flux per altres mètodes i després determinar *L* a partir de l'expressió $\Phi = L \cdot I$.

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Càlcul de la *fem* induïda a partir dels coeficients d'inducció

- Si el corrent varia lentament amb el temps (corrent quasi estacionari), podem utilitzar les expressions de la magnetostàtica:

$$\vec{B} \cong \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{A} \cong \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}}{R}$$

- La força electromotriu induïda en C_2:

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(M_{21} I_1\right) = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

- La força electromotriu autoinduïda:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(L \cdot I\right) = -L\frac{dI}{dt}$$

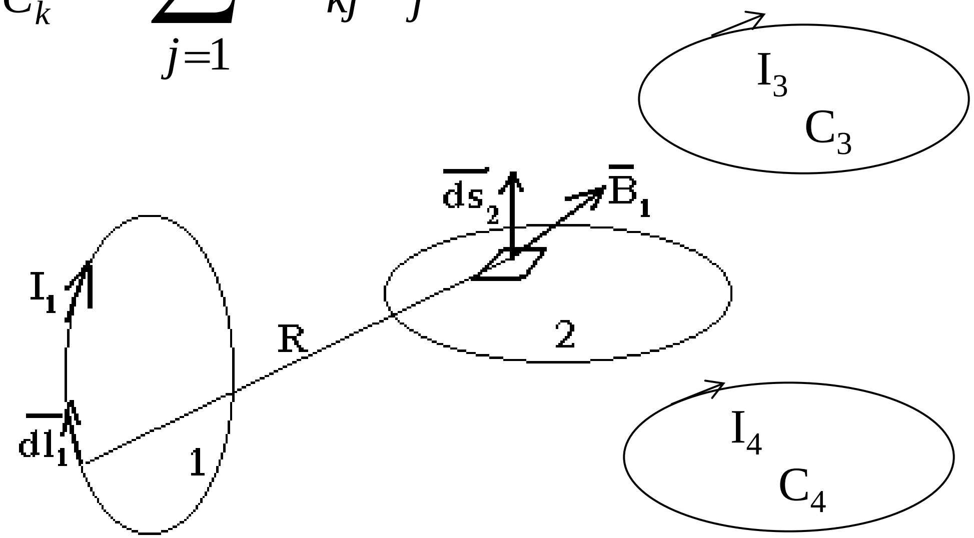
Vàlides per a baixes freqüències

Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

Coeficients d'inducció i autoinducció per a un conjunt de circuits

- Una altra aplicació: càlcul del flux i de la *fem* induïda en un circuit quan està en presència d'altres.
- El flux total sobre el circuit k: $$\Phi_{totalsobreC_k} = \sum_{j=1}^{N} M_{kj} I_j$$
- On està inclòs el coeficient d'auto-inducció del circuit *k*: $$M_{kk} = L_k$$



Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

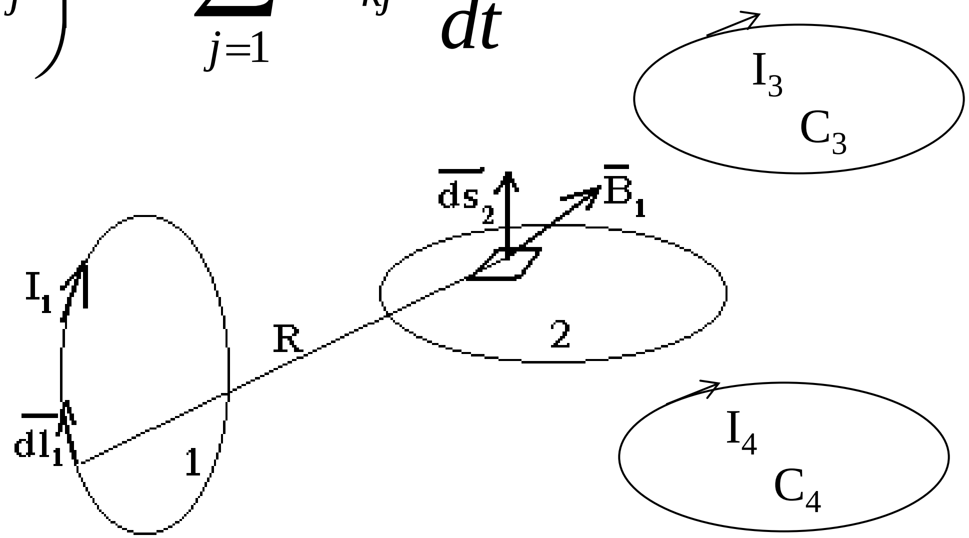
7.5. Coeficients d'inducció

Coeficients d'inducció i autoinducció per a un conjunt de circuits

- La força electromotriu induïda en C_k:

$$\varepsilon_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} M_{kj} I_j\right) = -\sum_{j=1}^{N} M_{kj}\frac{dI_j}{dt}$$

$$\Phi_{totalsobreC_k} = \sum_{j=1}^{N} M_{kj} I_j$$



Tema 7: INDUCCIÓ ELECTROMAG.

7.5. Coeficients d'inducció

EXEMPLES

- 1. Càlcul del coeficient **d'autoinducció** d'una bobina infinita de ***n*** espires per unitat de longitud i radi ***a***.

- 2. Càlcul del coeficient d'**inducció mútua** entre un solenoide infinit, de ***n'*** espires per unitat de longitud, i un solenoide finit de longitud ***L***, coaxial amb aquell, amb ***N*** espires de radi ***a***.