Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

4.1. Introducció. Conductors en electrostàtica
4.2. Teoremes d'unicitat
4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green
4.4. El mètode de les imatges
4.5. El mètode de separació de variables (coordenades cartesianes)

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Introducció

- Només hi ha 2 mètodes generals per a resoldre una equació diferencial en derivades parcials com és l'equació de Laplace.

- Mètodes integrals:
  - Avantatge: generalitat
  - Inconvenient: rarament integral analítica
- Mètode de separació de variables
  - Avantatge: equacions diferencials ordinàries
  - Inconvenient: mancança d'universalitat

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Introducció

- L'equació de Laplace només és separable en 11 sistemes de coordenades diferents (Morse p. 655):

1. **Rectangulars**
2. **Cilíndriques circulars**
3. " " " el·líptiques
4. " " " parabòliques
5. **Esfèriques**
6. Còniques
7. Parabòliques (rotacionals)
8. Esferoïdals prolates
9. Esferoïdals oblates
10. El·lipsoïdals
11. Paraboloïdals

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

COORDENADES RECTANGULARS

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- El mètode de separació de variables consisteix a factoritzar la funció, de tal manera que cada factor és una funció que depèn només d'una variable:

$$\phi(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$$

- L'equació de Laplace s'expressa com:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Derivades totals

- Substituint:

$$g\,h \frac{d^2 f}{dx^2} + f\,h \frac{d^2 g}{d y^2} + f\,g \frac{d^2 h}{d z^2} = 0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Dividint per ϕ: $$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{d\,y^2}+\frac{1}{h}\frac{d^2 h}{d\,z^2}=0$$
- Cada terme depèn només de x, y o z; per tant, són independents. Els anomenem en la forma:

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}=\alpha^2 \qquad \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2}=\beta^2 \qquad \frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dz^2}=\gamma^2$$

- Es compleix que: $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$
- Alguna/es han de ser negatives: $$-k_x^2-k_y^2+k_z^2=0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Expressant cada terme en funció de les constants k:

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2}+k_x^2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2 f}{dx^2}+k_x^2 f=0$$

$$\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2}+k_y^2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2 g}{dy^2}+k_y^2 g=0$$

$$\frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dz^2}-k_z^2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2 h}{dz^2}-k_z^2 h=0$$

Eq. diferencials amb coeficients constants

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

NOTA: solució d'eq. diferencials ordinàries amb coef. const.:

$$f''+pf'+qf=0 \quad\Rightarrow\quad m^2+pm+q=0 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$Solució: \quad\Rightarrow\quad f(x)=a_1e^{-mx}+a_2e^{mx}$$

$$f''+\alpha^2 f=0 \quad\Rightarrow\quad p=0;\quad q=+\alpha^2;\quad m=\frac{\pm\sqrt{-4\alpha^2}}{2}=\pm j\alpha$$

$$Solució: \quad\Rightarrow\quad f(x)=a_1e^{-j\alpha x}+a_2e^{j\alpha x}$$

$$f''-\alpha^2 f=0 \quad\Rightarrow\quad p=0;\quad q=-\alpha^2;\quad m=\frac{\pm\sqrt{4\alpha^2}}{2}=\pm\alpha$$

$$Solució: \quad\Rightarrow\quad f(x)=a_1e^{-\alpha x}+a_2e^{\alpha x}$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades* ***cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Per tant, les solucions particulars de les equacions són:

$\alpha^2 = -k_x^2$

$$f(x) = a_1 e^{-jk_x x} + a_2 e^{jk_x x} = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x$$

$\beta^2 = -k_y^2$

$$g(y) = b_1 e^{-jk_y y} + b_2 e^{jk_y y} = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y$$

$\gamma^2 = +k_z^2$

$$h(z) = c_1 e^{-k_z z} + c_2 e^{k_z z} = C_1 \cosh k_z z + C_2 \sinh k_z z$$

Sense *j*

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Per tant, les solucions de l'equació de Laplace es poden expressar com:

$$\phi(x,y,z) = f(x)\cdot g(y)\cdot h(z) = (A_1\cos k_x x + A_2 \sin k_x x)\cdot$$
$$\cdot(B_1\cos k_y y + B_2 \sin k_y y)\cdot(C_1\cosh k_z z + C_2 \sinh k_z z)$$

- Les constants: $k_x, k_y, k_z, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ es determinen a partir de les condicions de contorn (Dirichlet o Neumann) sobre les fronteres.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Com que es tracta de solucions harmòniques, perquè les condicions de contorn es puguen complir en tots els casos, la solució més general s'expressarà com:

$$\sum_{k_x k_y k_z} \phi(x,y,z) = \sum_{k_x k_y k_z} (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)\cdot$$

$$\cdot(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y)\cdot(C_1 \cosh k_z z + C_2 \sinh k_z z)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Si **alguna *k* és zero**, la solució és del tipus:

$$f(x) = A_n x_n + A'_n$$

- Si ho són les tres funcions:

$$\phi(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$$
$$= (A\,x + A')(B\,y + B')(C\,z + C')$$

- Advertència: s'ha de complir que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$

  - l'elecció de quina constant és positiva o negativa és arbitrària

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0$$

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Si hi ha **simetria de translació** (independència amb *z*): el potencial només depèn de les altres dues variables (*x*, *y*).
- La funció ϕ quedarà com: $$\phi(x,y) = f(x)\cdot g(y)$$
- L'equació s'expressa com: $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$
- De forma similar al cas 3D: $$\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} = 0$$

$$\alpha^2 = -k_x^2 \qquad \beta^2 = k_y^2 \qquad \frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 = 0 \qquad \frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dy^2} - k_y^2 = 0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades **cartesianes*** de l'eq. Laplace

- Amb solucions particulars:

$$f(x) = a_1 e^{-jk_x x} + a_2 e^{jk_x x} \quad = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x$$

Sense *j*

$$g(y) = b_1 e^{-k_y y} + b_2 e^{k_y y} = B_1 \cosh k_y y + B_2 \sinh k_y y$$

- La solució més general serà:

$$\sum_{k_x k_y} \phi(x, y) = \sum_{k_x k_y} (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x) \cdot$$

$$\cdot (B_1 \cosh k_y y + B_2 \sinh k_y y)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Determinació dels coeficients de la solució: c. de contorn

- Els coeficients es determinen analitzant les propietats de simetria del problema i aplicant les condicions de contorn.

- Recordem que: funció parella: $f(x) = f(-x)$

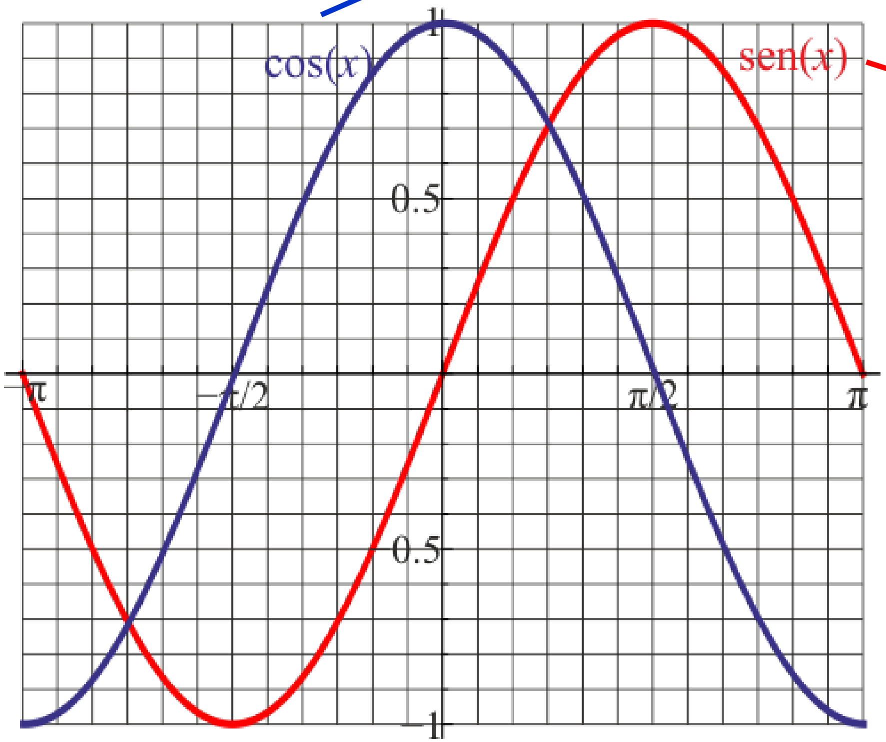
  funció imparella $f(x) = -f(-x)$

- Part dels coeficients seran zero depenent de si la solució ha de ser parella/imparella.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Funcions trigonomètriques



cosinus: funció parella

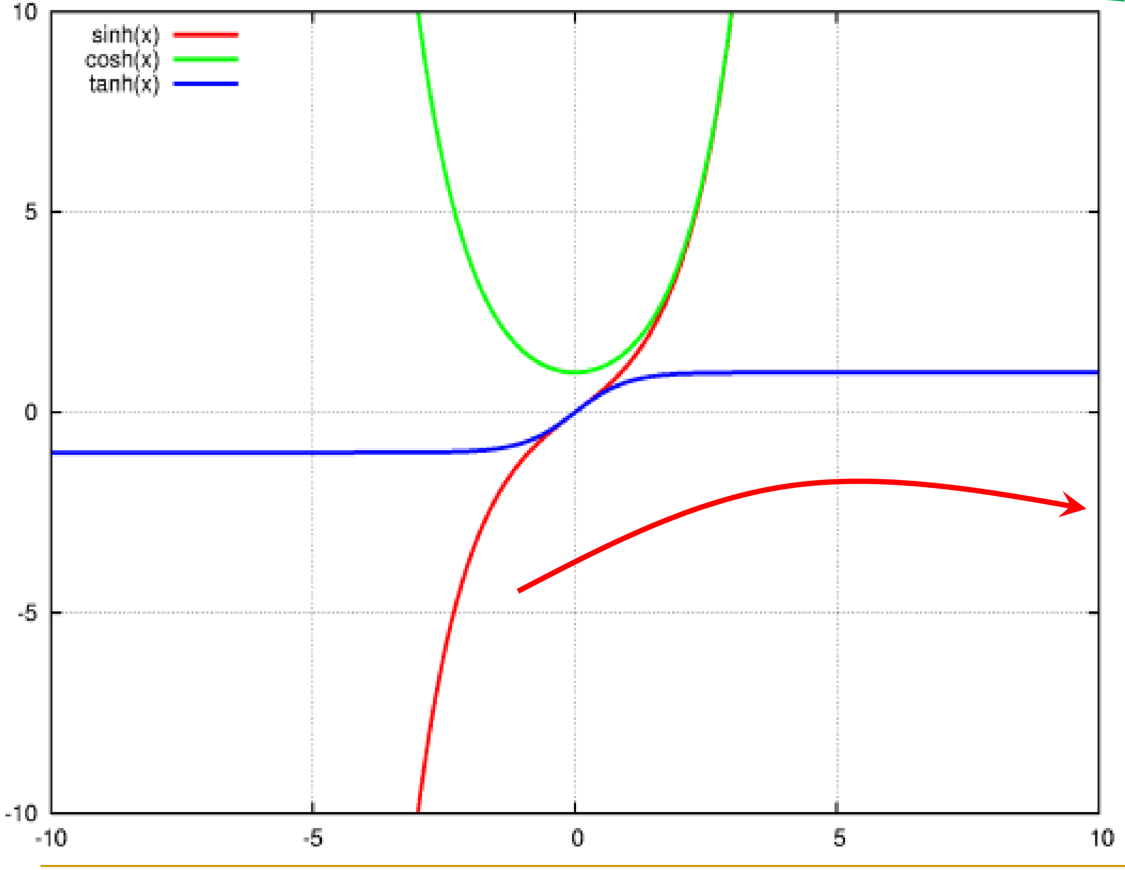
sinus: funció imparella

http://laplace.us.es/wiki/index.php/Tabla_de_f%C3%B3rmulas_de_trigonometr%C3%ADa

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Funcions hiperbòliques



cosh: funció parella

sinh: funció imparella

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_hiperb%C3%B3lica

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Determinació dels coeficients de la solució: c. de contorn

- La resta de coeficients es determinen aplicant les condicions de contorn.
- Per aïllar els coeficients, aplicarem condicions d’ortogonalitat en l’interval d'interès.
- Triarem aquella funció que, en multiplicar la solució aplicada a una condició de contorn, en integrar deixe només UN dels termes del sumatori.

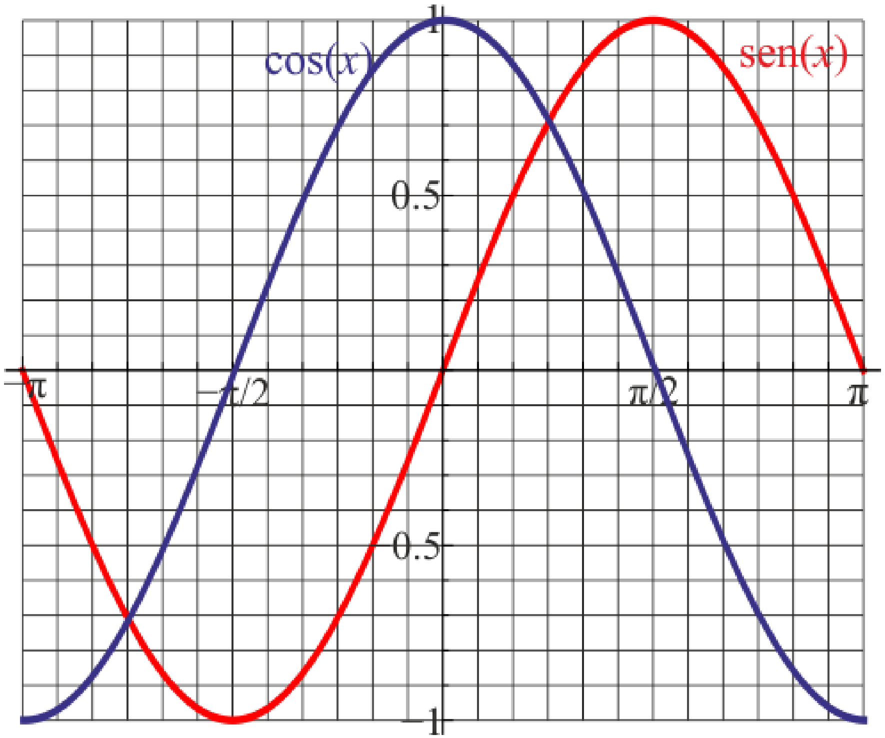
Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Interval d'ortogonalitat

Funcions trigonomètriques

- Condicions d'ortogonalitat, variable angular $\quad n, m \neq 0$



$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi = \pi\,\delta_{m,n}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi = \pi\,\delta_{m,n}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi = 0$$

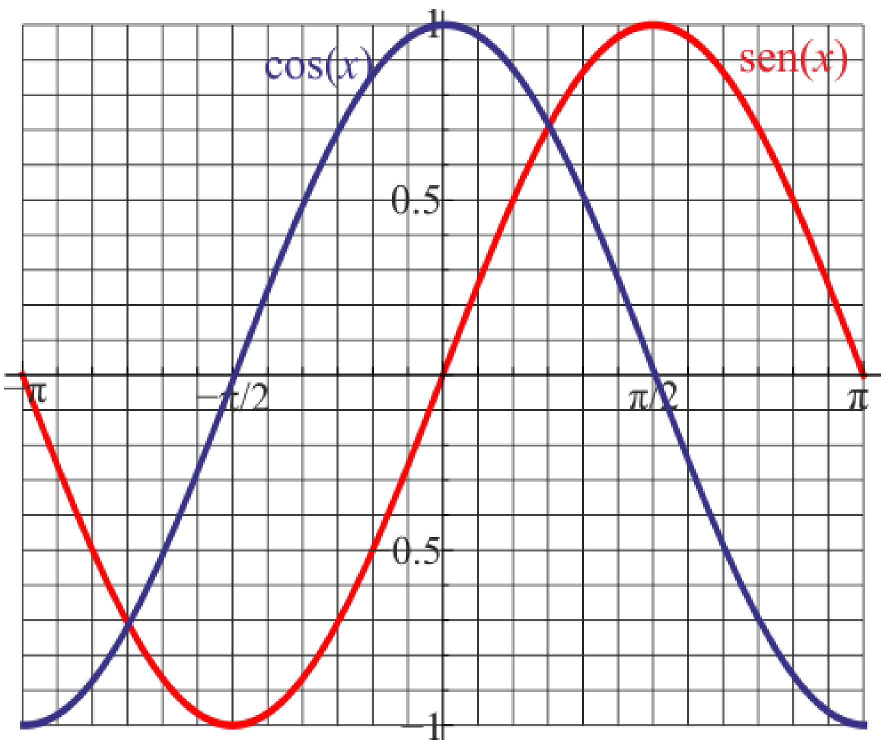
Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Interval d'ortogonalitat

Funcions trigonomètriques

- Condicions d'ortogonalitat, variable espacial $k_n, k_m \neq 0$



$$\int_0^a \cos(k_m x)\cos(k_n x)\,dx = \frac{a}{2}\delta_{m,n}$$

$$\int_0^a \sin(k_m x)\sin(k_n x)\,dx = \frac{a}{2}\delta_{m,n}$$

$$\int_0^a \sin(k_m x)\cos(k_m x)\,dx = 0$$