Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

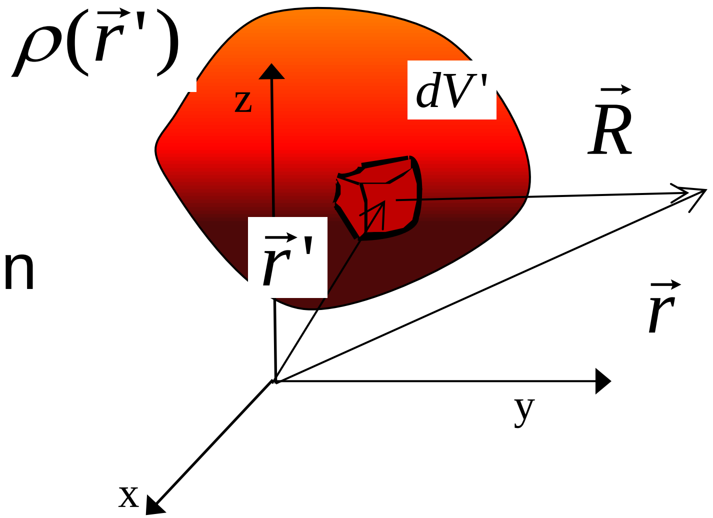
Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

BIBLIOGRAFIA	
Benito (Problemes)	Temes 4 i 5
Griffiths	Tema 3
Pomer	Tema 15
Reitz-Milford-Christy	Tema 3

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.1. Introducció

Introducció



- Plantejament general quan es coneix la densitat de càrrega en un volum *V'*.

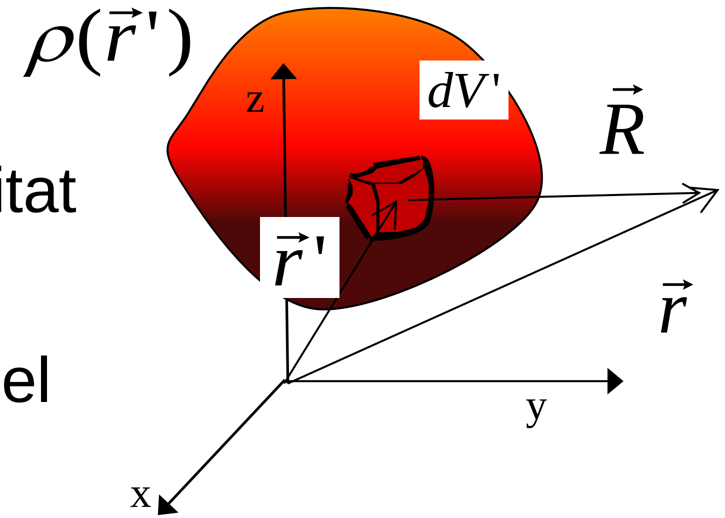
- Camp elèctric:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}\,')dV' \quad \text{(inconvenient: 3 integrals)}$$

- Potencial: $\phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV' \qquad E(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\phi(\vec{r})$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.1. Introducció



Introducció

- Però, i si no es coneix la densitat de càrrega?
- Si es coneix la càrrega total o el potencial: PROBLEMES DE VALORS EN LA FRONTERA
  - no es coneix la densitat de càrrega, però sí que es coneixen les condicions de contorn en el volum *V'*.
- Típic de conductors i/o condensadors:
  - es coneix la càrrega total, però no com està distribuïda
  - es coneix el potencial en certes superfícies

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

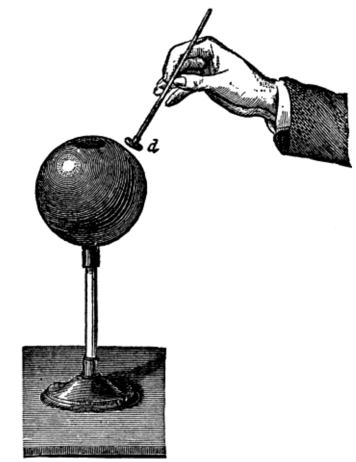
4.1. Introducció

Introducció

- EXEMPLES:
  - distribució de càrrega en un conductor: depèn de la forma

http://www.labscientificequipments.com/conductors-metal-7886.html

  - distribució de càrrega en una esfera enfront d'una altra càrrega *Q*
    > la distribució sobre la superfície depèn de diferents factors
    > no podem aplicar el teorema de superposició



http://etc.usf.edu/clipart/galleries/science/electricity.php?page=3&term=

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL
4.1. Introducció

Introducció

- Què cal fer? Utilitzar les equacions diferencials del potencial elèctric, aplicant condicions de contorn.
- Equacions diferencials que compleix el potencial
  - en una zona SENSE càrregues: $$\nabla^2\phi = 0$$ (equació de Laplace)
  - en una zona AMB càrregues: $$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ (equació de Poisson)
- Aquest mètode també s'utilitza en magnetostàtica (fora de les fonts): $\nabla^2\phi_m = 0$ $\quad (\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla}\phi_m)$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.1. Introducció

Introducció

- Mètodes més importants per a resoldre aqueixes eq. diferencials:
  - Mètode de la funció de Green
  - Mètode de les imatges
  - Mètode de separació de variables
  - Mètode de relaxació
  - Mètode de la transformació conforme (bidimensionals)
  - Mètodes basats en equacions integrals
  - Mètodes basats en elements o diferències finites

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.1. Introducció

Aspectes generals de l'equació de Laplace

- Les solucions de l'equació de Laplace: $$\nabla^2 \phi = 0$$ s'anomenen funcions harmòniques i no tenen ni màxims ni mínims.

- Aquestes funcions harmòniques apareixen com a solució d'altres problemes físics (gravitació, propagació del calor, dinàmica de fluids...)

Laplace, Pierre-Simon (1749-1827)

http://www.ee.nthu.edu.tw/~sdyang/Courses/PDE.htm

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

Condicions de contorn i **UNICITAT**

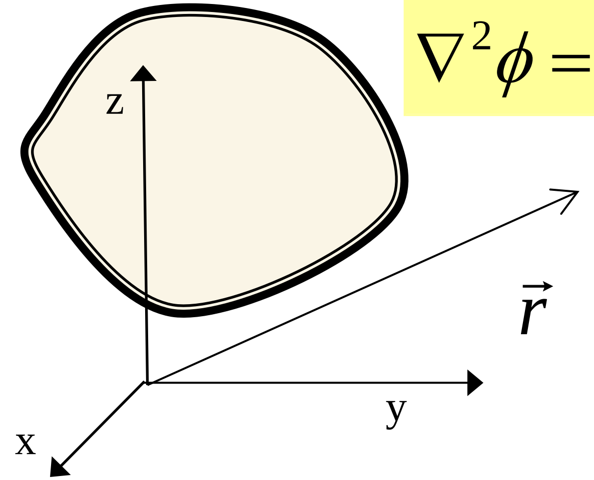
- La resolució de l'equació de Laplace necessita condicions de contorn. Quines són les adequades?
- En una dimensió és fàcil ($\Phi(x) = ax+b$): 2 condicions (conèixer-ne només una no és suficient).
- Però, en diverses dimensions, com sabem quan tenim condicions suficients?
- <u>Teoremes d'unicitat</u>: *quines són les condicions de contorn que fan que existisca una SOLUCIÓ ÚNICA.*

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d’unicitat

$$\rho = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$



Condicions de contorn i **UNICITAT:**

1r teorema

- Suposem una regió que satisfà l’equació de Laplace.
- <u>PRIMER TEOREMA d’unicitat</u>: La solució del potencial electrostàtic de l’equació de **Laplace** en un volum donat queda unívocament determinada si es coneix el potencial en tots els punts de la superfície.
- Quan es coneix el valor d’una funció en la frontera (ací, el potencial): condicions de contorn de **Dirichlet**.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

Condicions de contorn i **UNICITAT: DEMOSTRACIÓ**

- Demostració: per reducció a l'absurd.
- Suposem dos potencials diferents ϕ_1 i ϕ_2, solució de l'equació de Laplace, que compleixen les mateixes condicions de contorn.
- Definim una tercera solució, $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$, que també satisfarà l'equació de Laplace: $\nabla^2\phi_3 = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = 0$
- Suposem que aqueixa solució ϕ_3 és diferent de les solucions ϕ_1 i ϕ_2 dins del volum. Com que en la superfície ϕ_1 i ϕ_2 compleixen les mateixes condicions de contorn:

$$\phi_3)_s = \phi_1)_s - \phi_2)_s = 0 \qquad i \qquad \nabla\phi_3)_{ns} = \nabla\phi_1)_{ns} - \nabla\phi_2)_{ns} = 0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

Condicions de contorn i **UNICITAT: DEMOSTRACIÓ**

- Per a ser una solució harmònica, el potencial no pot tenir màxims ni mínims en el volum. Per tant, si el potencial és zero en la superfície: $\phi_3)_s = 0$; aleshores $\phi_3(r) = 0$.

- I es compleix també que $\nabla\phi_3(r) = 0$ en tot el volum.

- Cosa que suposa que la solució del camp siga única: $$\vec{\nabla}\phi_2 = \vec{\nabla}\phi_1 \rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

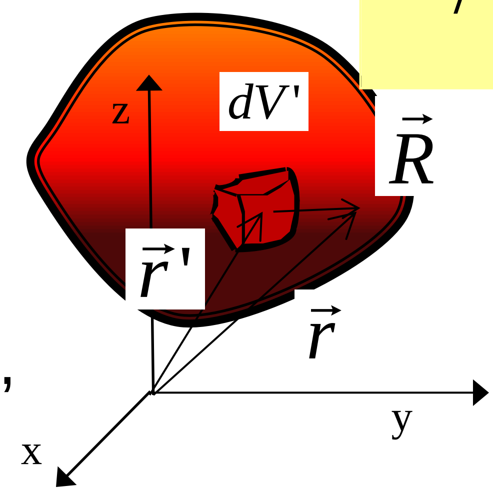
- ... i la del potencial, també: $$\phi_3 = 0 \rightarrow \phi_2 = \phi_1$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

$$\rho \neq 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



Condicions de contorn i **UNICITAT:**

extensió 1r teorema

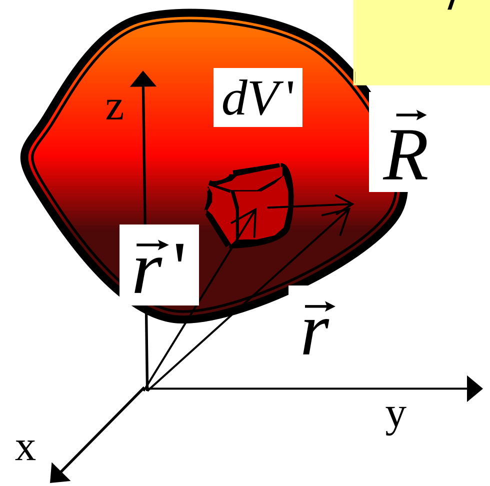
- El primer teorema d'unicitat *pot estendre's* a l'equació de **Poisson**, si hi haguera addicionalment una distribució de càrrega present ρ(r').
- Extensió del PRIMER TEOREMA d'unicitat: La solució del potencial electrostàtic de l'equació de **Poisson** en un volum donat queda unívocament determinada si es coneix: (*a*) la densitat de càrrega en tota la regió i (*b*) el potencial en tots els punts de la superfície.
- Demostració per reducció a l'absurd semblant a la de l'equació de Laplace.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

$$\rho \neq 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



Condicions de contorn i **UNICITAT:**

2n teorema

- Suposem ara que tenim un volum del qual, en lloc de conèixer el potencial en la superfície, es coneix la càrrega en superfícies conductores.

- Addicionalment pot haver-hi una distribució de càrrega ρ(r').

- Està el camp elèctric unívocament determinat?

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

Condicions de contorn i **UNICITAT**

- <u>SEGON TEOREMA d'unicitat</u>: En una regió *V'* rodejada de conductors i contenint una densitat de càrrega, el camp elèctric està unívocament determinat si es coneix (*a*) la densitat de càrrega en tota la regió i (*b*) la càrrega total en cada conductor (la regió pot estar rodejada per un conductor perfecte o per una superfície en l'infinit).

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

Condicions de contorn i **UNICITAT**

- OBSERVACIÓ: En un conductor, si es coneix la derivada normal respecte de la superfície del potencial, també es coneix la densitat de càrrega:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = E_n \qquad\qquad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- En conseqüència, també es coneix la càrrega total:

$$Q_T = \int_S \sigma \, dS = -\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS$$

- *Conèixer la càrrega total equival a conèixer la derivada normal del potencial en tota la superfície*.

Condicions de contorn i **UNICITAT:** 2n teorema

- SEGON TEOREMA d'unicitat (redacció alternativa): En una regió *V'* que conté conductors i una densitat de càrrega, el camp elèctric està unívocament determinat si es coneix (*a*) la densitat de càrrega en tota la regió i (*b*) la derivada normal del potencial en tots els punts de les superfícies dels conductors (la regió pot estar rodejada per un conductor perfecte o per una superfície en l'infinit).
- Quan es coneix el valor de la derivada d'una funció en la frontera (ací, el valor de la càrrega total): condicions de contorn de **Neumann**.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.2. Teoremes d'unicitat

Condicions de contorn i **UNICITAT**

- IMPORTÀNCIA DELS TEOREMES D'UNICITAT: Quan trobem una solució a les equacions de Laplace i Poisson i que satisfà les condicions en la frontera, siga pel mètode que siga, aquesta és la correcta.

- Aquesta és la base dels mètodes de potencial.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Identitats de Green

- Suposem dues funcions escalars *Φ* i *ψ*, contínues i derivables a l'interior d'un volum *V*.
- Aplicant el teorema de la divergència al producte *Φ*· ∇*ψ*

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\,\vec{\nabla}\,\psi\right)dV = \int_S \phi\,\vec{\nabla}\,\psi\cdot d\vec{S}$$

- Tenint en compte que: $\vec{\nabla}\left(\phi\,\vec{\nabla}\,\psi\right) = \vec{\nabla}\,\phi\cdot\vec{\nabla}\,\psi + \phi\,\nabla^2\psi$

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\,\phi\cdot\vec{\nabla}\,\psi + \phi\,\nabla^2\psi\right)dV = \int_S \phi\,\vec{\nabla}\,\psi\cdot d\vec{S}$$

1a identitat de Green

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Identitats de Green

- Aplicant el teorema de la divergència al producte $\psi \cdot \nabla\Phi$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\psi\,\vec{\nabla}\phi\right)dV = \int_S \psi\,\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{S}$$

- Desenvolupant de forma equivalent:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\phi + \psi\,\nabla^2\phi\right)dV = \int_S \psi\,\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{S}$$

- Restant:

$$\int_V \left(\phi\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2\phi\right)dV = \int_S \left(\phi\,\vec{\nabla}\psi - \psi\,\vec{\nabla}\phi\right)dS$$

2a identitat o teorema de Green

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Identitats de Green

- El terme de la dreta es pot expressar en funció de les derivades normals $(\vec{n} \perp \ superfície, \vec{n} \,||\, al\ vector\ \vec{S})$

$$\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{S} = \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}\right) \cdot dS = \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \qquad \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{S} = \left(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n}\right) \cdot dS = \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

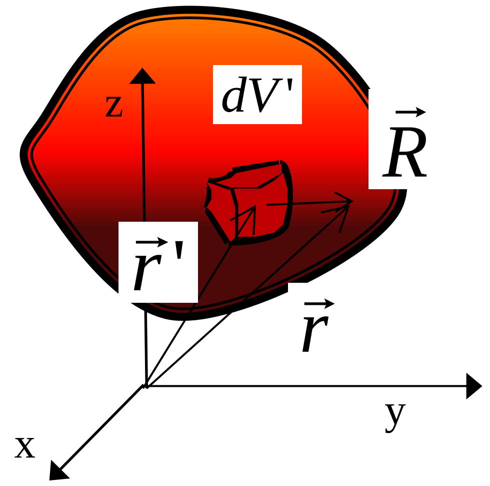
- Per tant:

2a identitat o teorema de Green

$$\int_V \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\right) dV = \int_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green



Potencial electrostàtic

- Considerem un volum *V'* que conté una densitat de càrrega *ρ*(*r*') i del qual es coneix el potencial i/o les seues derivades en la superfície *S'*.
- Considerem que les funcions *Φ* i *ψ* són:

$$\phi(\vec{r}) = potencial \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

- Coordenades punts font (') i punts camp (sense ')

$$-\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \qquad \nabla^2\frac{1}{R} = \nabla'^2\frac{1}{R} = -4\pi\,\delta(\vec{R})$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Potencial electrostàtic

- PRIMER TERME del teorema de Green:

$$\int_{V'}\left(\phi\nabla'^2\psi-\psi\nabla'^2\phi\right)dV'=\int_{V'}\left(\phi\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\nabla'^2\phi\right)dV'=$$

$$\int_{V'}\phi(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{R})\,dV'=\phi(\vec{r})$$

$$=\int_{V'}\left(-4\pi\,\phi(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{R})-\frac{1}{R}\nabla'^2\phi(\vec{r}\,')\right)dV'=$$

$$=-4\pi\phi(\vec{r})+4\pi\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 R}dV'$$

$$\nabla'^2\phi(\vec{r}\,')=-\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Potencial electrostàtic

- SEGON TERME del teorema de Green

$$\int_S \left(\phi\, \vec{\nabla}\, \psi - \psi\, \vec{\nabla}\, \phi\right) dS = \int_{S'} \left(\phi(\vec{r}\,')\, \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{1}{R}\, \vec{\nabla}'\phi(\vec{r}\,') \right) d\vec{S}\,'$$

- Igualant:

$$-4\pi\phi(\vec{r}) + 4\pi \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 R}\, dV' = \int_{S'} \left(\phi(\vec{r}\,')\, \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{1}{R}\, \vec{\nabla}'\phi(\vec{r}\,') \right) d\vec{S}\,'$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Potencial electrostàtic

- Aïllant el terme del potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_{S'}\left(\frac{1}{R}\vec{\nabla}'\phi(\vec{r}\,') - \phi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}\right)d\vec{S}'$$

- Considerant: $\vec{\nabla}'\phi\cdot d\vec{S}' = \left(\vec{\nabla}'\phi\cdot\vec{n}'\right)\cdot dS' = \dfrac{\partial\phi}{\partial n'}\,dS'$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\left[\oint_{S'}\frac{1}{R}\,\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}dS' - \oint_{S'}\frac{1}{R}\,\phi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}d\vec{S}'\right]$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Potencial electrostàtic, RESUM

- Solució integral del potencial electrostàtic en una regió *V'*:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\left[\int_{S'}\frac{1}{R}\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}dS' - \int_{S'}\frac{1}{R}\phi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}d\vec{S}\,'\right]$$

- El <u>primer terme</u> està determinat per les càrregues en l'interior de *V'*.
- El <u>segon terme</u> està determinat pels valors del potencial en la superfície S' (condicions de Dirichlet) i de la seua derivada respecte de la normal en& *S'* (condicions de Neumann).

– → no és necessari conèixer a la vegada el potencial i les seues derivades (condicions de Cauchy).

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Potencial electrostàtic, INTERPRETACIÓ dels termes

- MATEMÀTICAMENT: solució general del potencial
- Integral de volum: $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

  → solució particular de l'equació de Poisson en tot l'espai.

- Integral de superfície: $$\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left(\frac{1}{R}\vec{\nabla}'\phi(\vec{r}\,')-\phi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}\right)d\vec{S}'$$

  → solució general dins de *S*' de l'equació de Laplace (equació homogènia del potencial).

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green

Potencial electrostàtic, densitats de càrrega

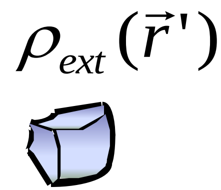
- FÍSICAMENT: termes integrals de superfície
- Primer terme de superfície: $$\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{1}{R}\frac{\partial \phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}dS'$$

  $\rightarrow$ potencial creat per una densitat de *q* superficial: $$\sigma(\vec{r}\,') = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}$$

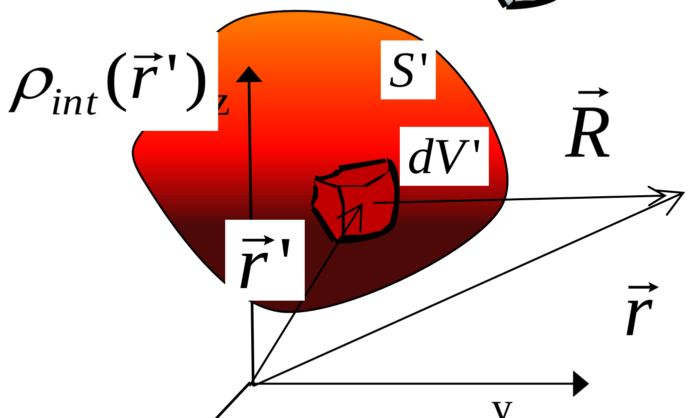
- Segon terme: $$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S'} \phi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}d\vec{S}'$$ $$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\vec{R}\cdot\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dV'$$

  $\rightarrow$ potencial creat per una densitat de dipols normals en& *S* $$\vec{P}(\vec{r}\,') = -\varepsilon_0 \phi(\vec{r}\,')\vec{n}\,'$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL



4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green



COMENTARI FINAL

Si tenim:

- Un conjunt de càrregues, de les quals, només es coneix una part, la interior a la superfície *S*'
- L'efecte de les fonts desconegudes en l'exterior es pot substituir pel coneixement del potencial i la seua derivada en una superfície S'.
- Les integrals de superfície (del potencial i la seua derivada) representen l'efecte de les càrregues exteriors: càrregues superficials i densitat de dipols.
- Si no hi ha càrrega en l'exterior, les integrals de superfície són zero i el problema es redueix al clàssic amb $\rho(r')$.