Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

4.1. Introducció. Conductors en electrostàtica
4.2. Teoremes d'unicitat
4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green
4.4. El mètode de les imatges
4.5. El mètode de separació de variables (coordenades cilíndriques)

COORDENADES CILÍNDRIQUES

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Funció potencial

Factorització en *coordenades* ***cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- L'equació de Laplace en c. cilíndriques s'expressa com:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

- Si factoritzem la funció ϕ en la forma:

$$\phi(r,\varphi,z)=R(r)Q(\varphi)Z(z)$$

- L'equació, ja en derivades totals i dividint per ϕ:

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{Q}\frac{1}{r^2}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\alpha^2}=0$$

Dificultat: depen-
dència en *r* i φ

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- El terme en *Z* és independent i ha de ser constant:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\alpha^2 \qquad\qquad \frac{d^2Z}{dz^2}-\alpha^2 Z=0$$

- Si $\alpha^2 = k^2$:

$$Z(z)=c_1e^{-kz}+c_2e^{kz}=C_1\cosh kz+C_2\sinh kz$$

$$(per\ a\ k=0:\quad Z(z)=C_3z+C_4)$$

- L'equació quedarà com:

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{Q}\frac{1}{r^2}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}+\underbrace{k^2}_{\alpha^2}=0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- Multiplicant per r^2: $$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\underbrace{\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}}_{\beta^2}+k^2r^2=0$$
- El segon terme només depèn de φ: $$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=\beta^2 \qquad \frac{d^2Q}{d\varphi^2}+\beta^2Q=0$$
- Si $\beta^2 = -n^2$: $$\phi(\varphi)=b_1e^{-jn\varphi}+b_2e^{jn\varphi}=B_1\cos n\varphi+B_2\sin n\varphi$$ $$(per\ a\ n=0:\quad \phi(\varphi)=B_3\varphi+B_4)$$
- L'equació quedarà com: $$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-n^2+k^2r^2=0$$

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en ***coordenades cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- Dividint per r^2 i multiplicant per R: $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0$$
- Desenvolupant el parèntesi... $$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0$$
  ... s'arriba a l'equació de Bessel: $$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+\left(k^2r^2-n^2\right)R=0$$

Eq. diferencial amb coeficients NO constants

amb solució: $$R(r)=A_1\,J_n(k\,r)+A_2\,Y_n(k\,r)$$

Funcions de Bessel

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

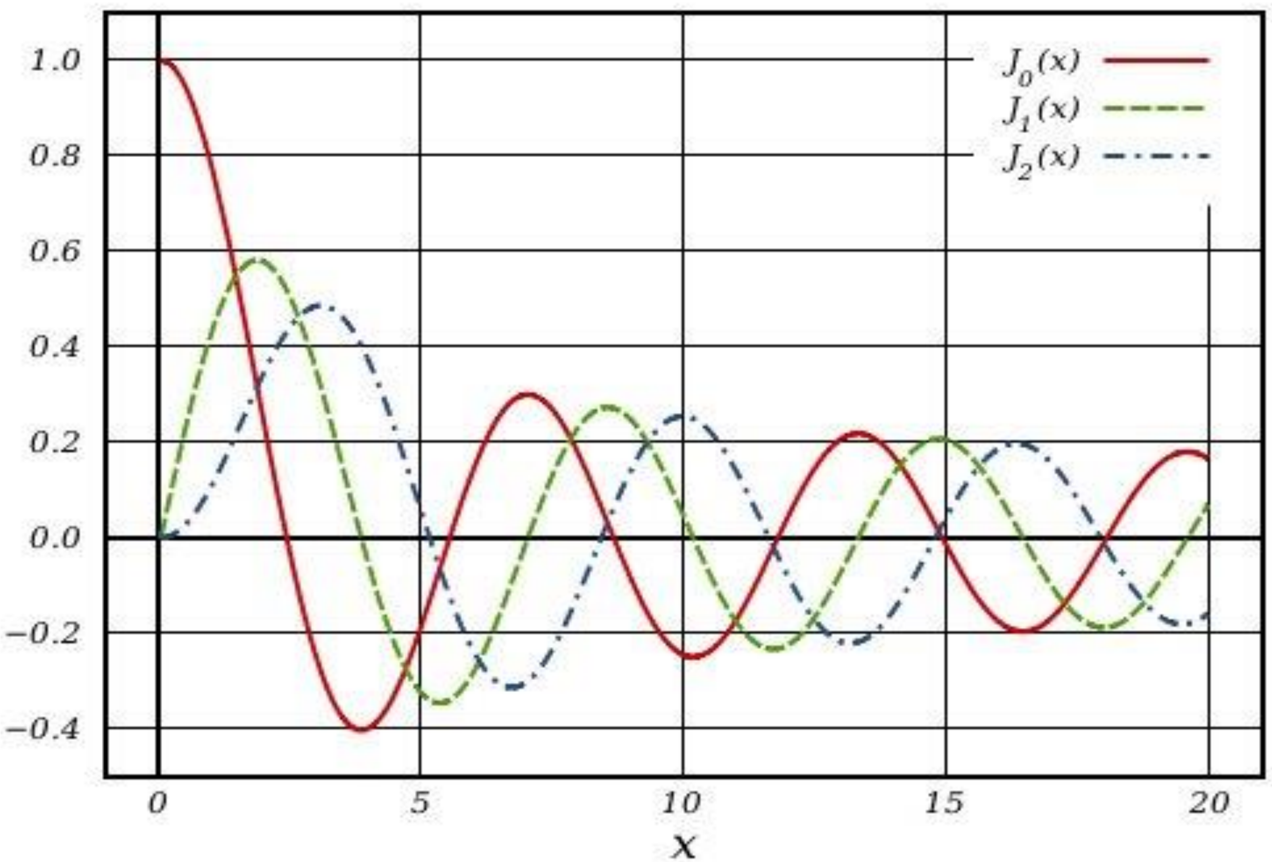
4.5. Mètode de separació de variables

Equació de Bessel:

Ordre

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$(x = k\,r)$$



J_n

Funcions de Bessel de 1a classe (finites en l'origen)

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Bessel

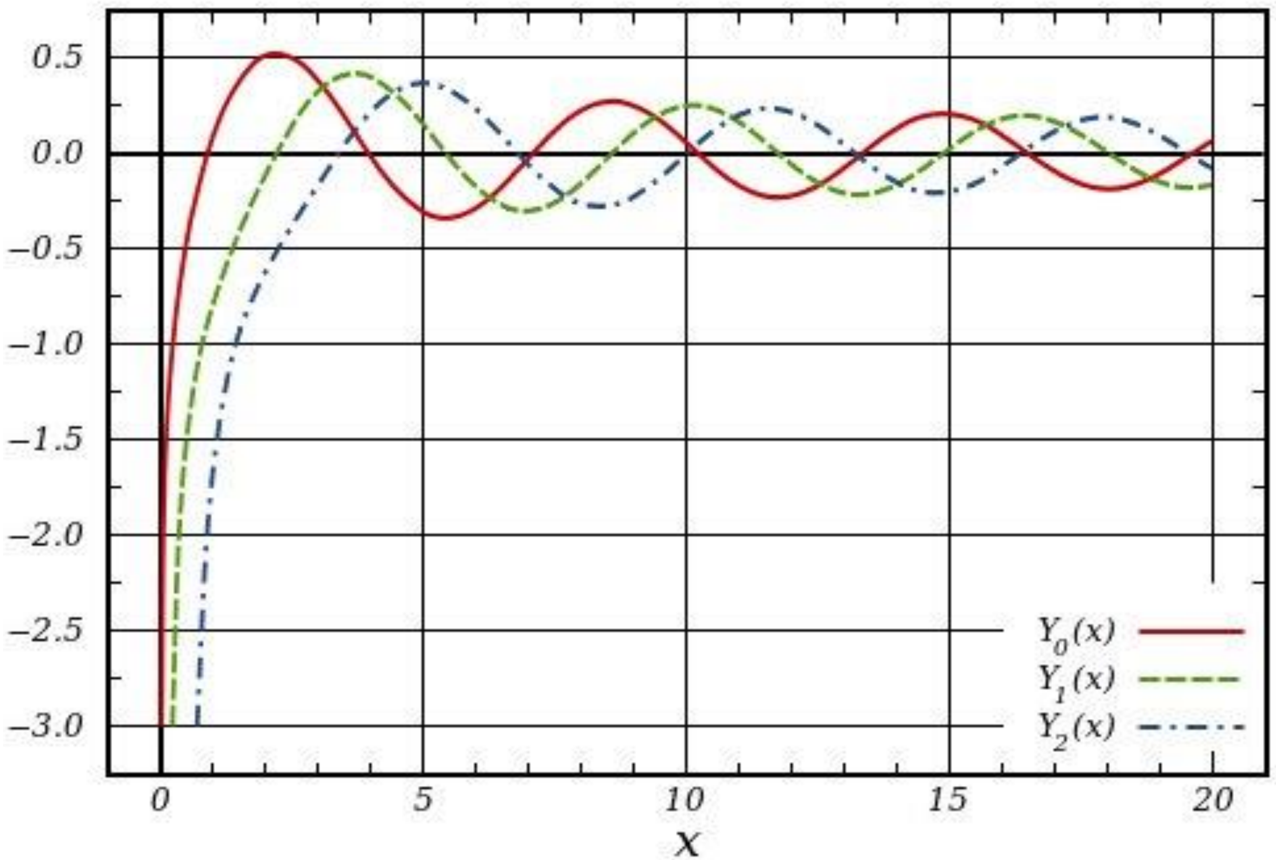
4.5. Mètode de separació de variables

Equació de Bessel:

Ordre

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

$$(x = k\,r)$$



Y_n o N_n

Funcions de Bessel de 2a classe (infinites en l'origen)

http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Bessel

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- Solució: $R(r) = A_1 J_n(k\ r) + A_2 Y_n(k\ r)$

$$(per\ a\ k=0, n \neq 0: \quad R(r) = A_3 r + A_4)$$

$$(per\ a\ k=0, n=0: \quad R(r) = A_5 \ln r + A_6)$$

- ϕ amb les tres variables:

Sempre que ***k ≠ 0** i **n ≠ 0***

$$\phi(r,\varphi,z) = R(r)\cdot Q(\varphi)\cdot Z(z) = \left[A_1 J_n(k\,r) + A_2 Y_n(k\,r)\right]\cdot$$

$$\cdot\ (B_1 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi)\ \cdot (C_1 \cosh kz + C_2 \sinh kz)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- La solució més general per a ϕ serà:

$$\sum_{k,n} \phi(r,\varphi,z) = \sum_{k,n} R_{k,n}(r)\cdot Q_n(\varphi)\cdot Z_k(z)$$

$$= \sum_{k,n} \left[A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr)\right] \cdot$$

$$\cdot (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \cdot (D_n \cosh kz + D_n \sinh kz)$$

*Sempre que **k ≠ 0** i **n ≠ 0***

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Determinació dels coeficients de la solució: c. de contorn

- Part dels coeficients seran zero, depenent de si la solució ha de ser zero/finita/infinita en l'origen.
- La resta de coeficients es determinen aplicant les condicions de contorn.
- Per aïllar els coeficients, aplicarem condicions d'ortogonalitat en l'interval d'interès.
- Triarem aquella funció que, en multiplicar la solució aplicada a una condició de contorn, en integrar deixe només UN dels termes del sumatori.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Condició d'ortogonalitat de les funcions de Bessel:

diferent *n*

$$\int_0^a r\, J_m(q_{mn} r/a)\cdot J_m(q_{mn'} r/a)\, dr = \frac{a^2}{2}\left(J_{m+1}(q_{mn'})\right)^2 \delta_{nn'}$$

mateix ordre

on q_{mn} són els zeros de la funció de Bessel $J_m(x)$

$J_{m+1}(q_{mn'})$ funció de Bessel d'ordre $m+1$, avaluada en q_{mn}

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

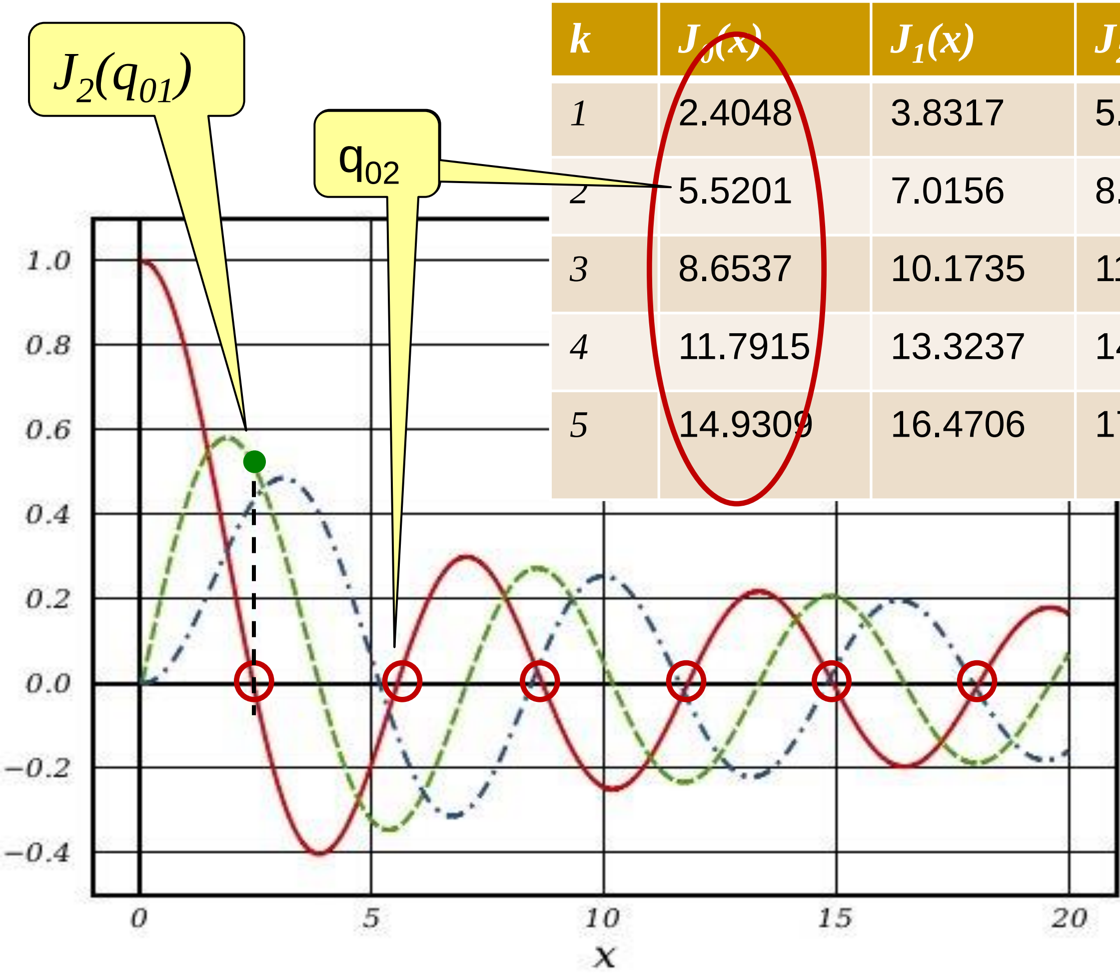
4.5. Mètode de separació de variables

Equació de Bessel: POSICIÓ DELS ZEROS

J_n Funcions de Bessel de 1a classe (finites en l'origen)

q_{41}

k	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178



http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades* ***cilíndriques*** de l'eq. Laplace

Si n o k són zero:

- Si n = 0: $$\phi(\varphi) = B_1\varphi + B_2$$
- Si k = 0: $$Z(z) = C_1 z + C_2$$ i $$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-n}$$
- Si ambdues són zero:

$$\phi(r,\varphi,z) = R(r)\cdot Q(\varphi)\cdot Z(z) = (A_1 \ln r + A_2)\cdot(B_1\varphi + B_2)\cdot(C_1 z + C_2)$$

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades* ***cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- Problemes amb **simetria de translació**: el potencial només depèn de dues variables (r i φ).
- La funció *Φ* quedarà com: $$\phi(r,\varphi,z)=R(r)Q(\varphi)$$
- L'equació s'expressa com: $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$
- De forma similar al cas 3D: $$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\underbrace{\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}}_{-n^2}=0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-n^2R=0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades **cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- Amb solucions particulars per a r :

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-n}$$

$$(per\ a\ n = 0 : \quad R(r) = A_1 \ln r + A_2)$$

- Amb solucions particulars per a φ :

$$\phi(\varphi) = b_1 e^{-jn\varphi} + b_2 e^{jn\varphi} = B_1 \cos n\varphi + B_2 \sin n\varphi$$

$$(per\ a\ n = 0 : \quad \phi(\varphi) = B_3 \varphi + B_4)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades* ***cilíndriques*** de l'eq. Laplace

- La solució més general serà:

Cas de n=0, k=0

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi(r,\varphi,z)=\left(A_1\ln r+A_2\right)+\left(B_1\varphi+B_2\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_1r^n+C_2r^{-n}\right)\cdot\left(D_1\cos n\varphi+D_2\sin n\varphi\right)$$