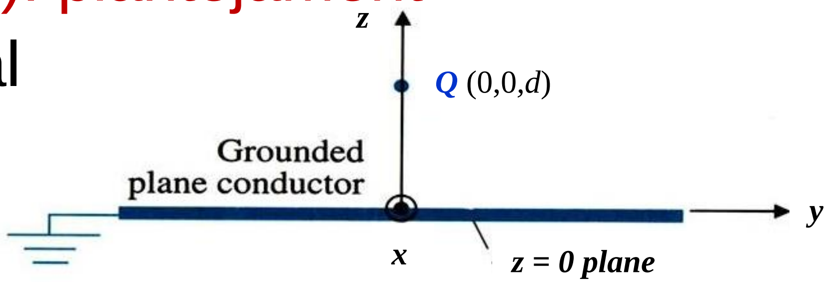
Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

4.1. Introducció. Conductors en electrostàtica
4.2. Teoremes d'unicitat
4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green
4.4. El mètode de les imatges
4.5. El mètode de separació de variables

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): plantejament



- Suposem una càrrega puntual enfront d'un pla conductor a potencial zero.
- Quin és el potencial en la regió superior?
- Problema a què ens enfrontem: resoldre l'equació de Poisson en la regió z > *0* amb *Q* situada en (0,0,d) i amb les condicions de contorn:

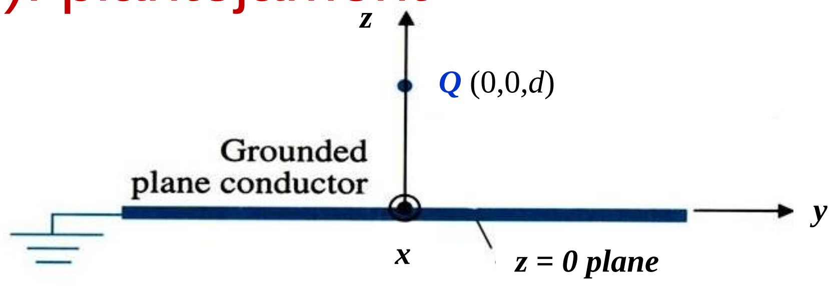
$\phi = 0$ en $z = 0$ $\qquad\qquad$ $\phi \rightarrow 0$ per a $z \rightarrow \infty$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): plantejament

- Una altra forma de veure el problema:



- La càrrega puntual *Q* indueix una distribució de càrrega en el conductor, en principi desconeguda.

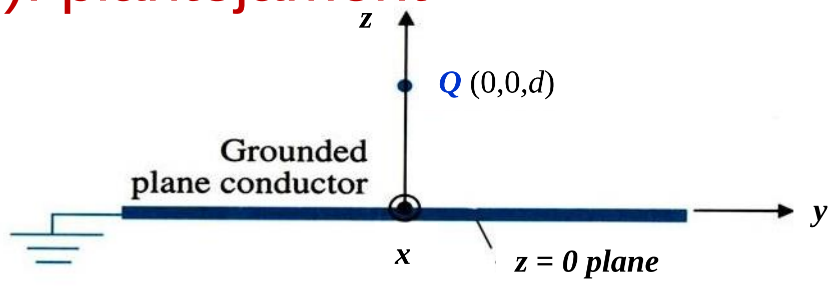
- El potencial vindrà determinat per les dues contribucions (càrrega puntual *Q* i distribució de càrrega).

- però... com determinar la distribució de càrrega induïda?

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): plantejament

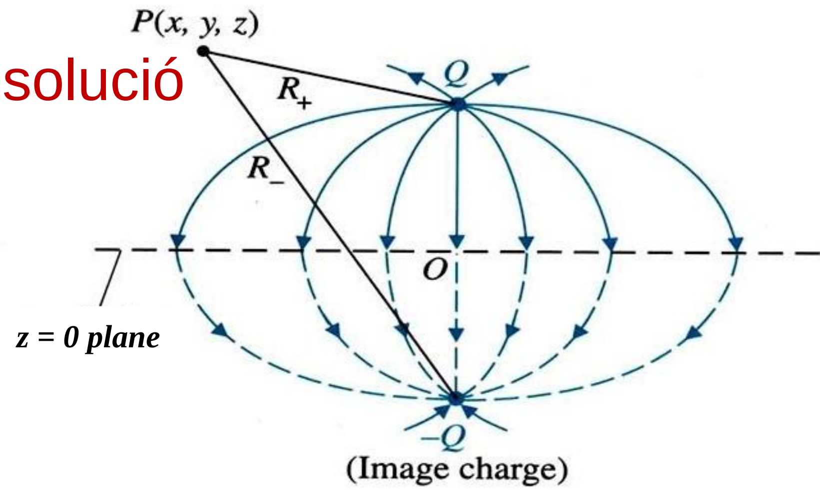


- El primer <u>teorema d'unicitat</u> ens assegura que la solució és única, no importa el mètode per a trobar-la.

- <u>Base del mètode de les imatges</u>: trobar una/es càrregues que representen la distribució de càrrega induïda en el conductor, que tal manera que ens permeten resoldre l'equació de Poisson amb les condicions de contorn establertes.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges



Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): resolució

- Ací representem el conductor (la distribució de càrrega) per una altra càrrega puntual Q':

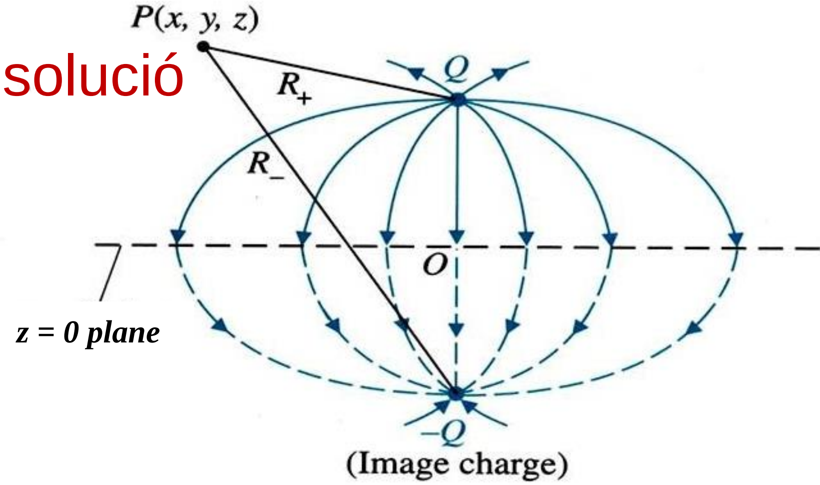
  Q en (0,0,d) Q' en (0,0,d')

- Per tant, el potencial vindrà donat per

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{Q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d')^2}}\right]$$

- Per determinar el valor de Q' i la seua posició, apliquem les condicions: $\phi = 0$ en z = 0 $\phi \rightarrow 0$ per a $z \rightarrow \infty$

4.4. Mètode de les imatges



Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): resolució

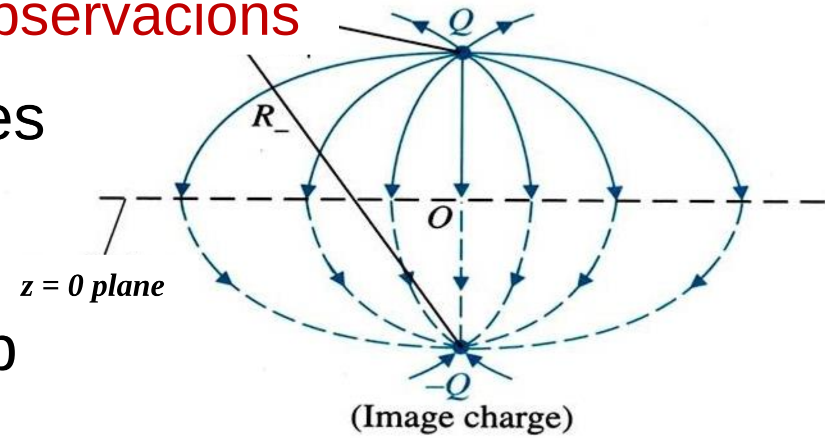
- Resolent les equacions que s'obtenen, determinem que:
- Càrrega: $Q' = -Q$
- Posició: $d' = -d \quad \rightarrow \quad (0, -d, 0)$
- Per tant, el potencial vindrà donat per

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}\right]$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): observacions



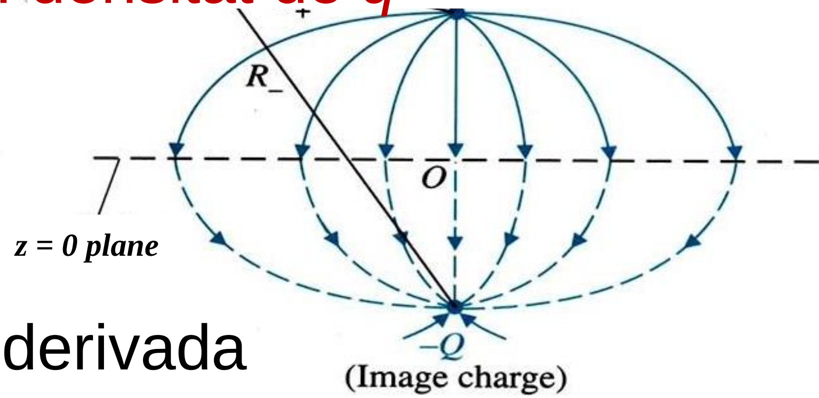
- Considerant les dues càrregues *Q* i *Q*', la regió superior (z > 0) té exactament el mateix potencial que el problema amb una càrrega i el pla conductor.
- La regió inferior (z < 0) no té el mateix potencial, però no ens importa, ja que no és regió d'interès.
- CONCLUSIÓ: el potencial d'una càrrega puntual enfront d'un pla conductor ve donada per l'equació anterior, per a $z \geq 0$ (regió d'interès).

Importància del teorema d'unicitat

- En essència, estem resolent un problema diferent.
- El teorema d'unicitat ens assegura que si la solució compleix l'equació de Poisson en la regió d'interès i dóna els valors correctes en les fronteres, aleshores la solució és correcta.
- Sense el teorema d'unicitat, la solució d'un problema diferent seria inservible.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges



Q enfront de pla conductor ($\phi = 0$): densitat de *q*

- En el problema real (*Q*, pla) hi ha una densitat superficial de càrrega σ.
- σ es pot calcular a partir de la derivada del potencial (***n*** perpendicular superfície):

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{z=0} \qquad \sigma(x, y, z) = \frac{-Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \qquad Q_T = \int_S \sigma \, dS = -Q$$

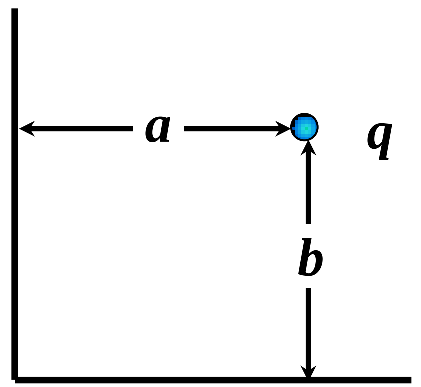
- Es pot comprovar que la càrrega total és igual a -*Q*, la mateixa càrrega utilitzada en el mètode de les imatges.

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

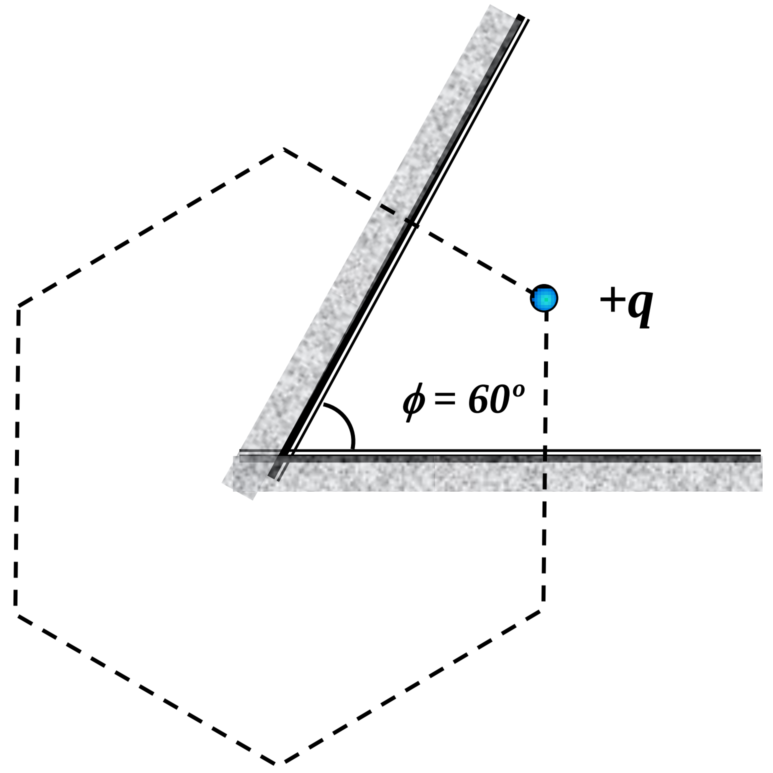
4.4. Mètode de les imatges

Altres càrregues puntuals enfront de plans:

- Plans perpendiculars:

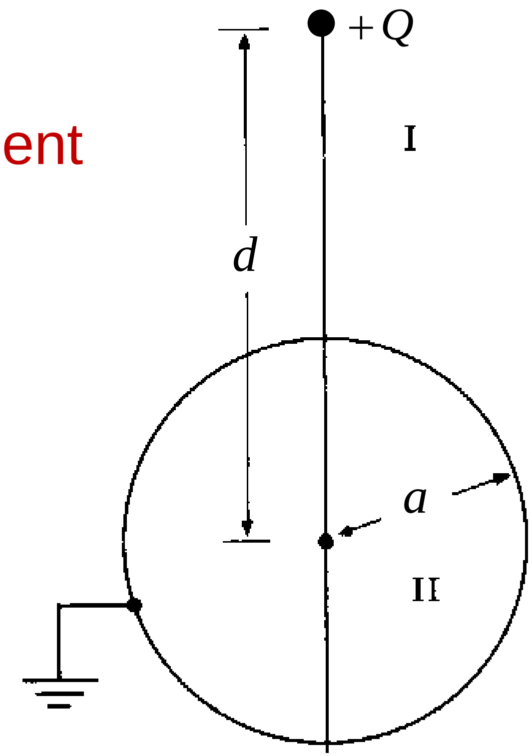


- Angle díedre:



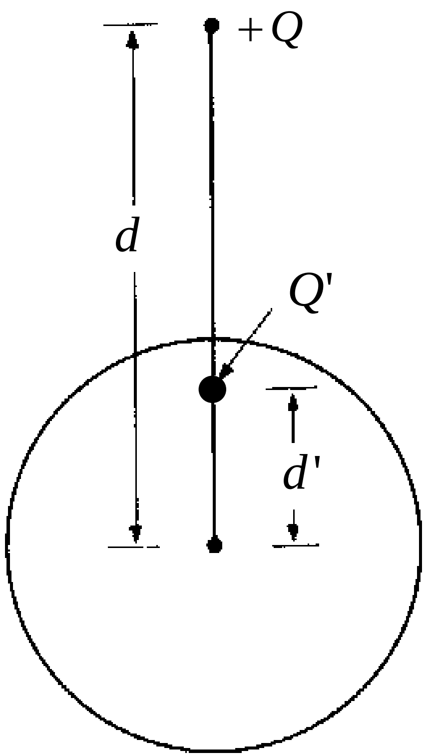
Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges



Q enfront d’esfera conductora ($\phi = 0$): plantejament

- Càrrega *Q* a una distància ***d*** al centre d’una esfera de radi ***a*** i a potencial V = 0



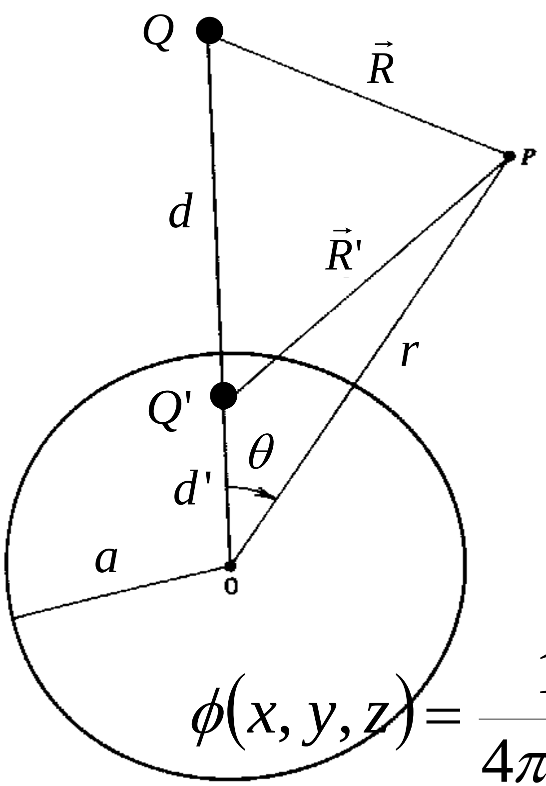
- La distribució superficial de càrrega en l’esfera es pot representar per una càrrega *Q*’ situada a una distància *d*’ del centre de l’esfera.

- Àrea d'interès: fora de l’esfera (zona I)

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront d'esfera conductora ($\phi = 0$): resolució



- El potencia creat per les càrregues Q i Q' en un punt qualsevol P és:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R} + \frac{Q'}{R'}\right]$$

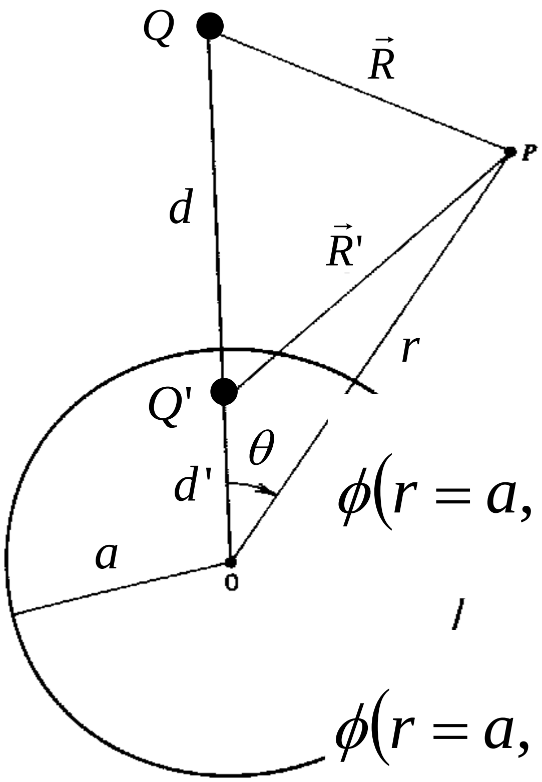
- En funció de l'angle θ:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} + \frac{Q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd'\cos\theta}}\right]$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront d'esfera conductora ($\phi = 0$): resolució



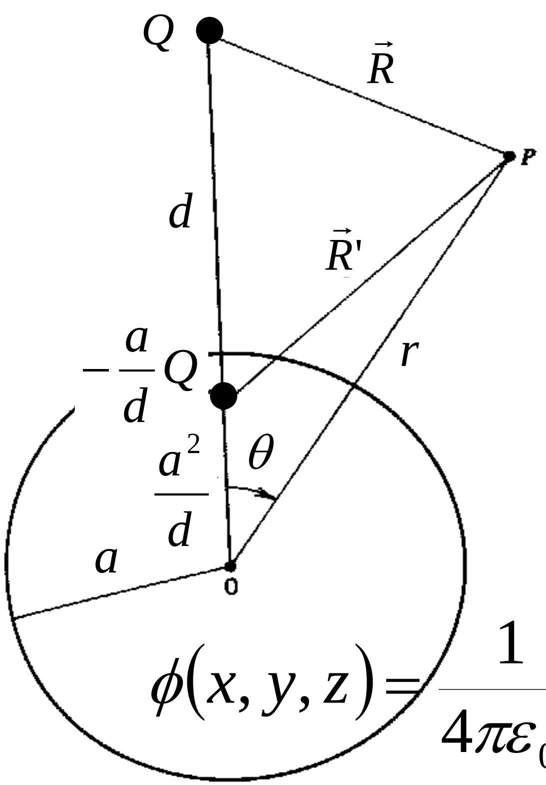
- Per determinar les 2 incògnites, s'aplica la condició que el potencial siga zero en dos punts de la superfície:
  - > $r = a,\ \theta = 0$
  - > $r = a,\ \theta = \pi$

$$\phi(r = a, \theta = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad}} + \frac{Q'}{\sqrt{a^2 + d'^2 - 2ad'}}\right]$$

$$\phi(r = a, \theta = \pi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{a^2 + d^2 + 2ad}} + \frac{Q'}{\sqrt{a^2 + d'^2 + 2ad'}}\right]$$

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront d'esfera conductora ($\phi = 0$): resolució



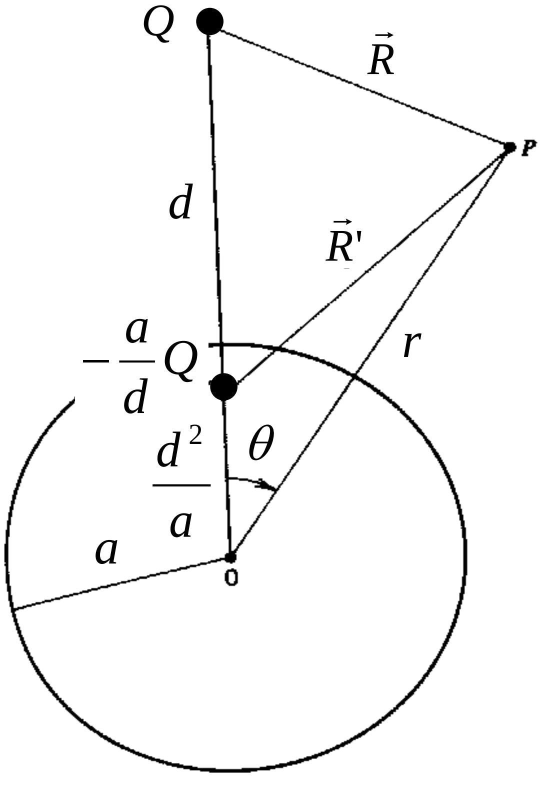
- Resolent el sistema d'equacions, determinem que:
  - valor de la càrrega imatge: $Q' = -\dfrac{a}{d}Q$
  - posició: $d' = \dfrac{a^2}{d}$
- Per tant, el potencial vindrà donat per

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta}} - \frac{aQ/d}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^4}{d^2} - 2\dfrac{a^3}{d}\cos\theta}}\right]$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.4. Mètode de les imatges

Q enfront d'esfera conductora ($\phi = 0$): resolució



- Resolent el sistema d'equacions, determinem que:
  - valor de la càrrega imatge: $Q' = -\frac{a}{d}Q$
  - posició: $d' = \frac{a^2}{d}$

- CONCLUSIÓ: el potencial creat per una càrrega puntual conductora enfront d'una esfera a $V = 0$, ve donat per l'equació anterior per a $r \geq a$.