Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.1 Introducció
2.2 Llei de Coulomb
2.3 Camp elèctric. Divergència i rotor del camp electrostàtic
2.4 Teorema de Gauss
2.5 El potencial electrostàtic

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

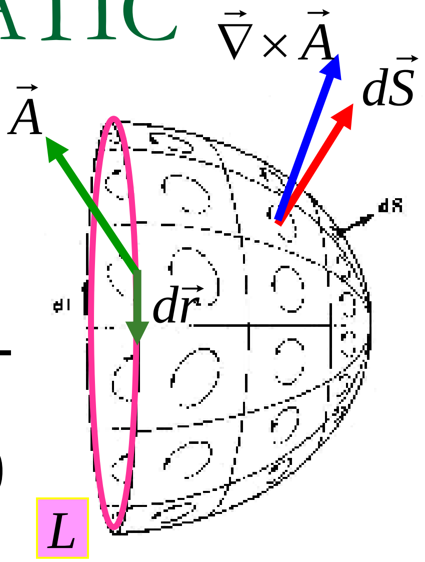
Introducció

- El camp *E* és una funció vectorial molt especial, amb propietats singulars.
- Qualsevol camp vectorial no pot ser un camp elèctric; per exemple, un camp com:

$$\vec{E}(\vec{r}) = y\,\vec{u}_x$$

  no pot ser-ho: el seu rotacional és diferent de zero.

- A continuació veurem com, explotant les característiques del camp elèctric, podem reduir el problema de calcular una funció vectorial a un altre de més simple, que consisteix en el càlcul d'un camp escalar.



Definició del potencial

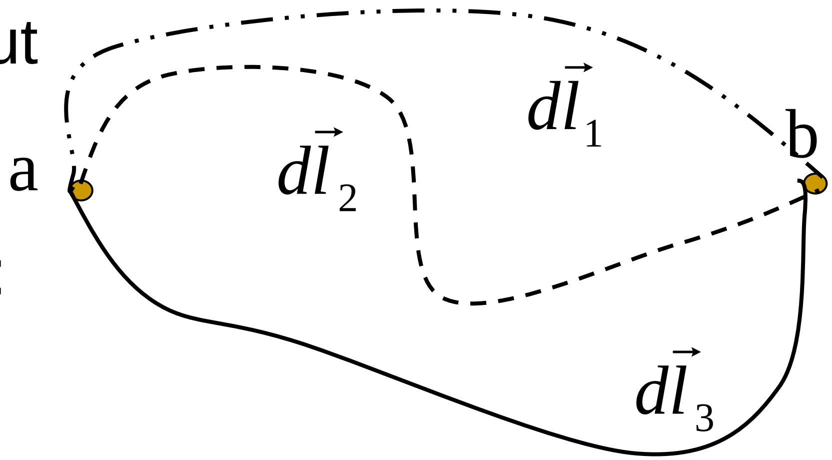
- Partirem de les propietats del camp *E* electrostàtic: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=0$$
- Aplicant el teorema de Stokes (*L* és recorregut tancat): $$\int_{S(L)}(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}=\oint_{L(S)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$
- És a dir, la circulació de *E* al llarg de qualsevol trajectòria tancada és zero: $$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$
- Per tant, *E* és conservatiu.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Conseqüències de camp conservatiu

- Si la circulació en un recorregut tancat és nul·la, aleshores la circulació entre dos punts qualssevol no depèn del camí:



$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = cte$$

- Definim el **potencial electrostàtic** en un punt a com la circulació del camp elèctric, canviada de signe, entre l'origen de coordenades O i el punt a:

$$\phi(\vec{r}_a) = -\int_O^a \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l}$$

Unitats en el SI: volt (V)

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Característiques del potencial

- El potencial electrostàtic en un punt: $\phi(\vec{r}_a) = -\int_O^a \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$
- Diferència de potencial entre dos punts a i b:

$$\phi_b - \phi_a = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a) = -\int_a^b \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

  expressió del potencial ϕ com una integral de *E*

- Per obtenir *E* a partir de ϕ, apliquem el teorema del gradient:

$$\int_a^b \left(\vec{\nabla} f\right) d\vec{r} = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a) \quad \rightarrow \quad \int_a^b \left(\vec{\nabla}\phi\right) d\vec{l} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Característiques

- Comparant:

$$\left.\begin{aligned}\phi_b-\phi_a&=-\int_a^b\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l}\\ \phi_b-\phi_a&=\int_a^b\left(\vec{\nabla}\phi\right)d\vec{l}\end{aligned}\right\}\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$$

- Expressió que dóna el camp electrostàtic com una equació diferencial del potencial.

- Hem ampliat les equacions diferencials que donen les propietats del camp elèctric del camp electrostàtic *E*:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=0\qquad\qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Significat físic del camp elèctric en relació al potencial

El camp elèctric com a vector:

- Direcció: perpendicular a les superfícies equipotencials, indicant la direcció de màxima variació del potencial.

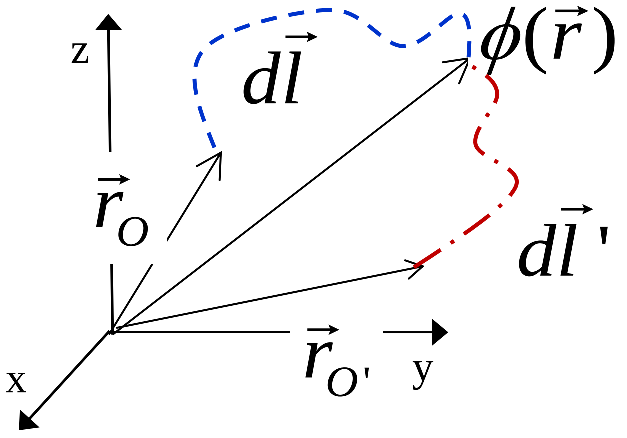
- Sentit: cap a valors **decreixents** de la funció escalar, en un punt, conseqüència del signe negatiu:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

- Mòdul: valor de la derivada del potencial en la direcció de màxima variació en aqueix punt.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic



Ambigüitat de la definició del potencial

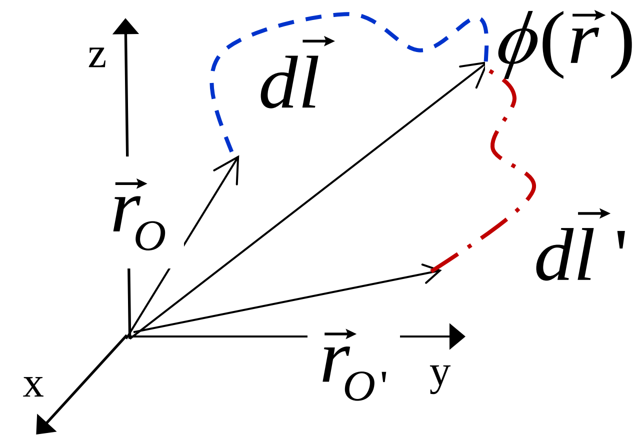
- Potencials que difereixen en una constant poden donar lloc a camps elèctrics iguals:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi'$$

- El potencial està indeterminat, però no el camp elèctric.
- Els potencials que difereixen en una constant és perquè <u>l'origen de potencials</u> és diferent.
- Solució?:
  - −Treballar amb diferències de potencials
  - − Buscar un origen de potencials comú

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic



Ambigüitat de la definició del potencial

- Habitualment es tria l'infinit com a origen de potencial:

$$\phi(\vec{r} \to \infty) \equiv \phi(\infty) = 0$$

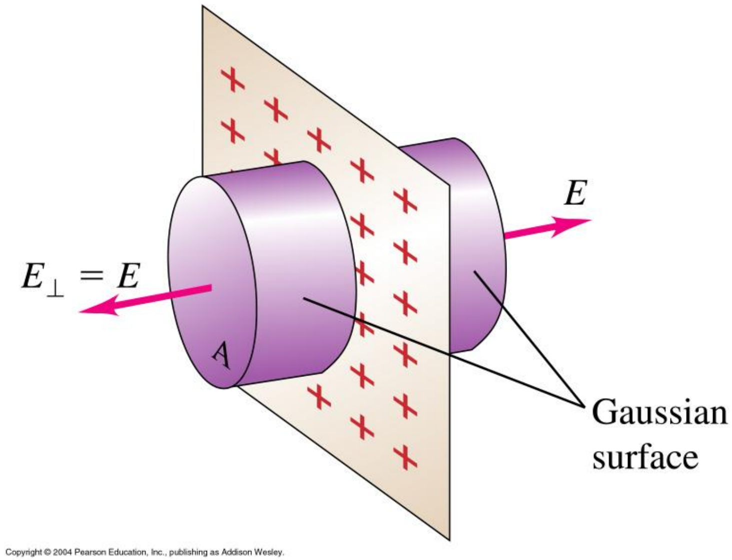
- Així, el potencial en un punt s'entendrà que és la diferència de potencial entre aqueix punt i l'infinit:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \phi(\infty) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{dl}$$

- Inconvenient: si la distribució de càrrega arriba a ∞, cal triar l'origen de potencials en un altre punt.

2.5. Potencial electrostàtic

http://www.physics.sjsu.edu/becker/physics51/e_and_v.htm



Exemple: làmina infinita carregada

- Camp prop de la làmina

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \qquad z > 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u}_z) \qquad z < 0$$

- Si origen en ∞:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \cdot dz\,\vec{u}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z-\infty) = +\infty$$

- Cal triar l'origen en altre punt, per exemple, en $\vec{r}_0 = z_0\,\vec{u}_z$:

$$\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \cdot dz\,\vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z_0 - z)$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Exemple: Potencial d'una càrrega puntual

- Camp d'una càrrega puntual en l'origen: $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

- El potencial $$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ $\rightarrow$ Les superfícies equi-potencials són esferes

- Una altra forma de calcular el potencial d'una *q* puntual:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\vec{\nabla}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right) = -\vec{\nabla}(\phi)$$

Identificant termes

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Exemple: Potencial d'una càrrega puntual

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

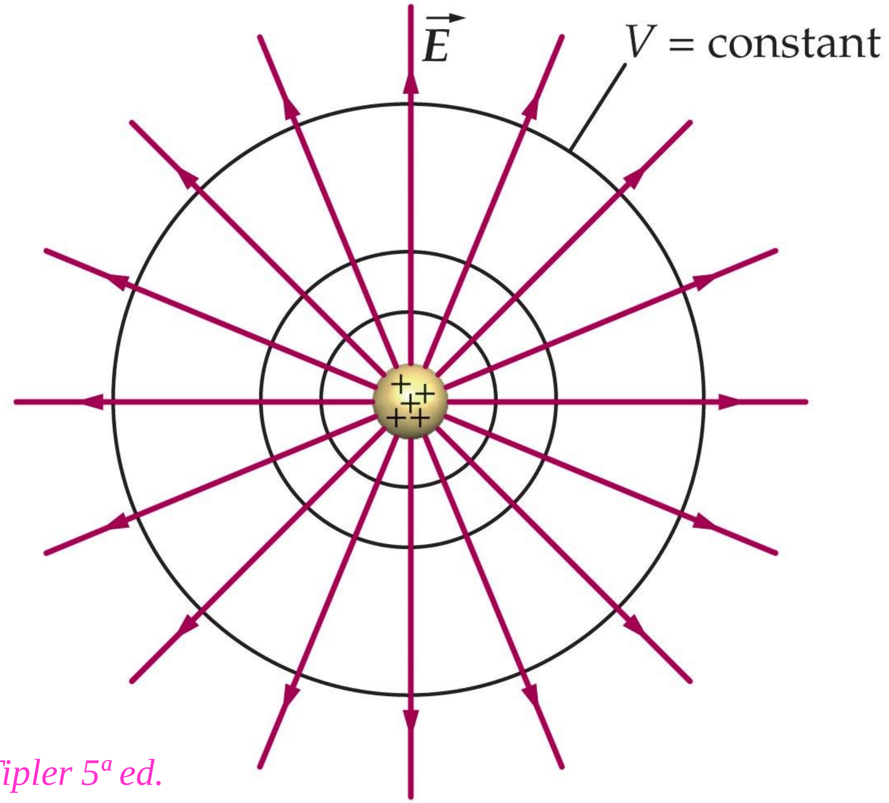
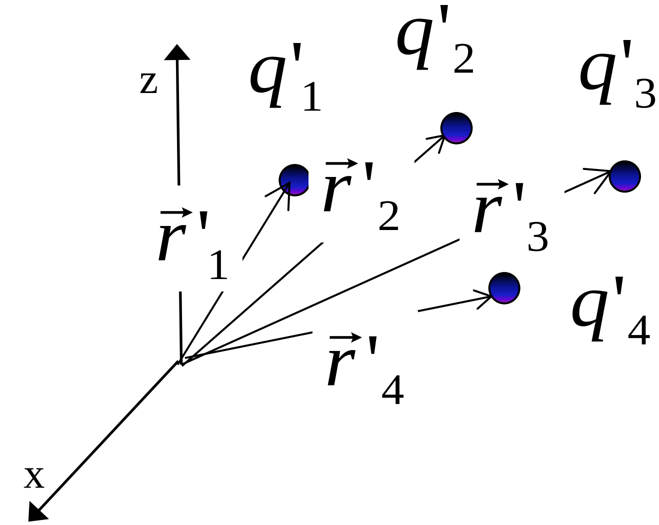


Fig. 23.18 Tipler 5ª ed.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic



Potencial d’un conjunt de càrregues puntuals (cap de les quals a l’infinit)

- Camp d’una càrrega puntual

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'_i}{R_i^3} \vec{R}_i$$

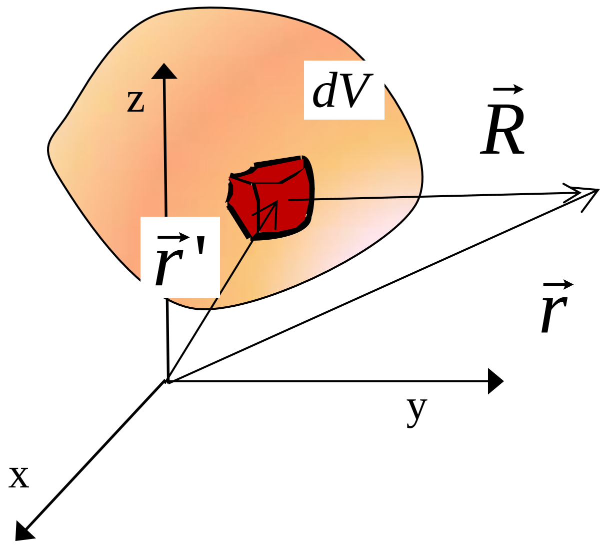
- El potencial, si no hi ha càrrega a l’infinit:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\vec{r})$$

- Els potencials de cada càrrega compleixen el principi de superposició.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic



Potencial d'una distribució contínua de càrrega que no arriba a l'infinit

- Podem suposar que cada element de càrrega es comporta com una càrrega puntual.
- El potencial creat per la càrrega elemental serà:

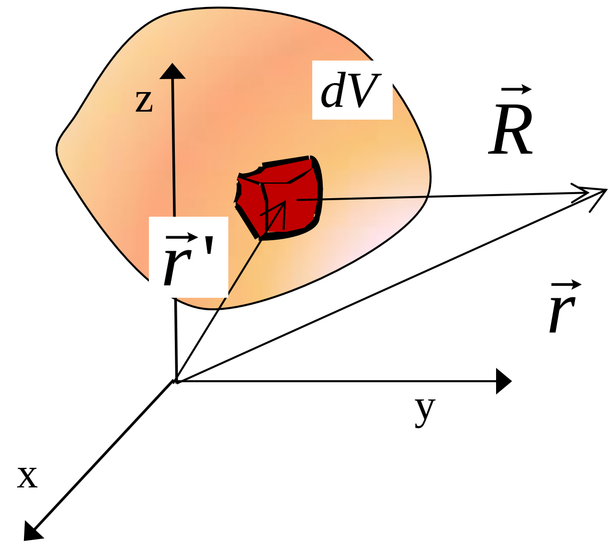
$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'}{R}$$

- Com que els potencials creats per càrregues puntuals compleixen el teorema de superposició, podem convertir Σ en una ∫:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \int_{V'} d\phi$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic



Potencial d'una distribució contínua de càrrega que no arriba a l'infinit

- Per tant, el potencial d'una densitat volumètrica:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

Integrals en les variables r'

- Potencial d'una densitat superficial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{R}\,dS'$$

- Potencial d'una densitat lineal:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{R}\,dl'$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Equacions de Poisson i Laplace:

- Sabem que:

  podem eliminar *E*?

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

- Desenvolupant ∇E:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) =$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = -\nabla^2\phi$$

EQUACIÓ DE POISSON

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

- En les regions on no hi ha càrrega:

EQUACIÓ DE LAPLACE

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$$

- Cal destacar que per a determinar $\phi(\vec{r})$ només es necessita una equació diferencial (Poisson), mentre que per a E en fan falta 2 (divergència i rotacional).

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Avantatges de la formulació potencial

- Ara podem calcular el potencial ϕ (escalar) a partir de la càrrega. Essent el camp elèctric E un vector, pareix un avantatge:

  > per a determinar ϕ només haurem de calcular el potencial i després derivar:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R} dV'$$

  > al contrari, a per determinar E haurem de resoldre 3 integrals:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R^3} \vec{R}\, dV'$$

  (una integral per component)

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Avantatges de la formulació potencial

- Però... com és possible que el potencial continga tota la informació relativa al camp elèctric E ?

- Perquè l'equació $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ens informa que les components del camp elèctric no són independents:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

- Raonament vàlid en tots els sistemes de coordenades

RESUM
d'electrostàtica

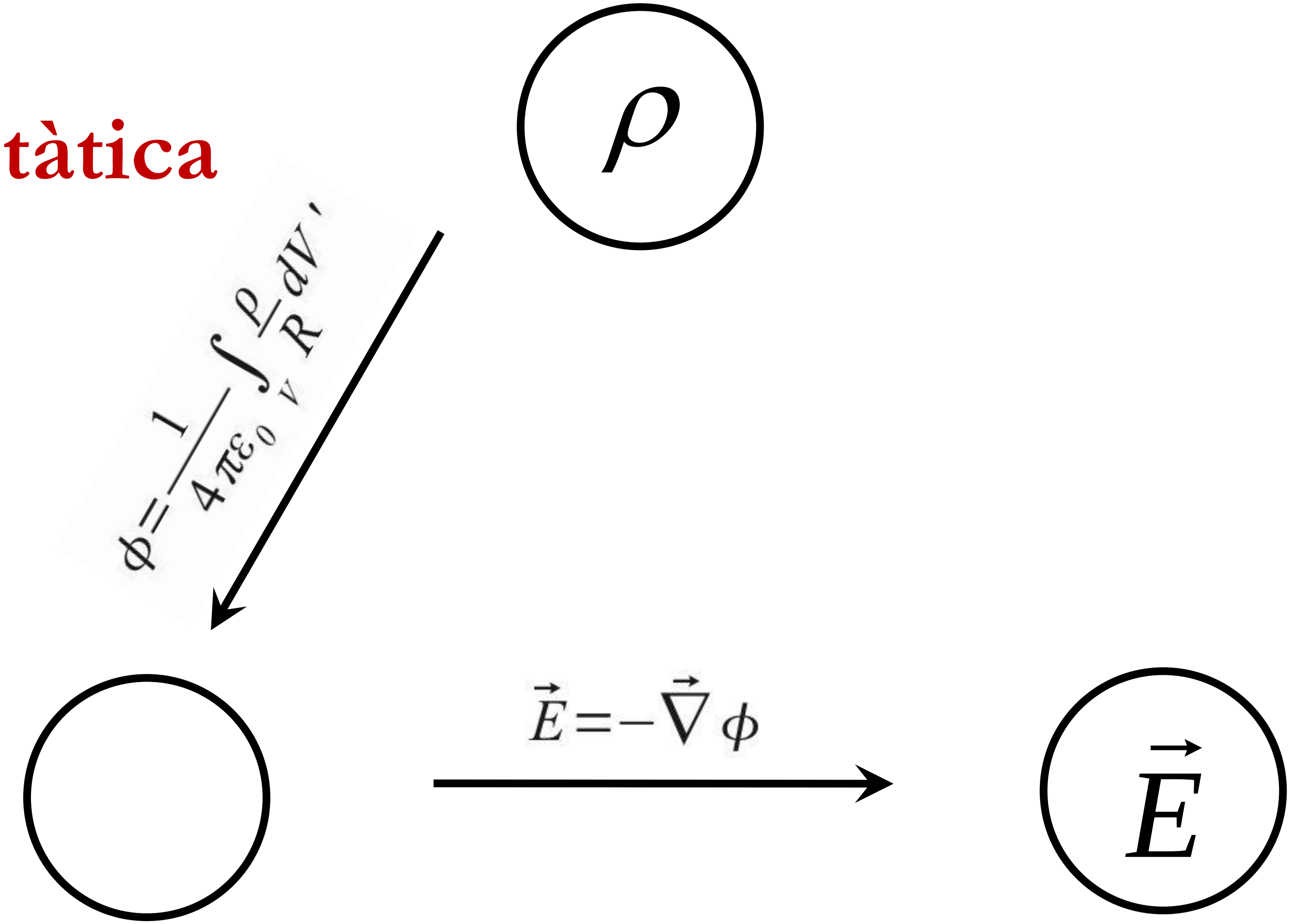
Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.5. Potencial electrostàtic

Problema habitual en electrostàtica

- Les tres magnituds fonamentals en electrostàtica són: ρ, ϕ, $\boldsymbol{E}$.
- PROBLEMA PLANTEJAT: Donada una distribució de càrrega ρ, quin és el camp elèctric $\boldsymbol{E}$ que crea?
- Si hi ha simetria: llei de Gauss.
- En el cas més general: $\rho \;\rightarrow\; \phi$ (int.) $\rightarrow\; \boldsymbol{E}$ (deriv.)

RESUM d’electrostàtica



Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall.1999; 3a ed. Fig. 2.35

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

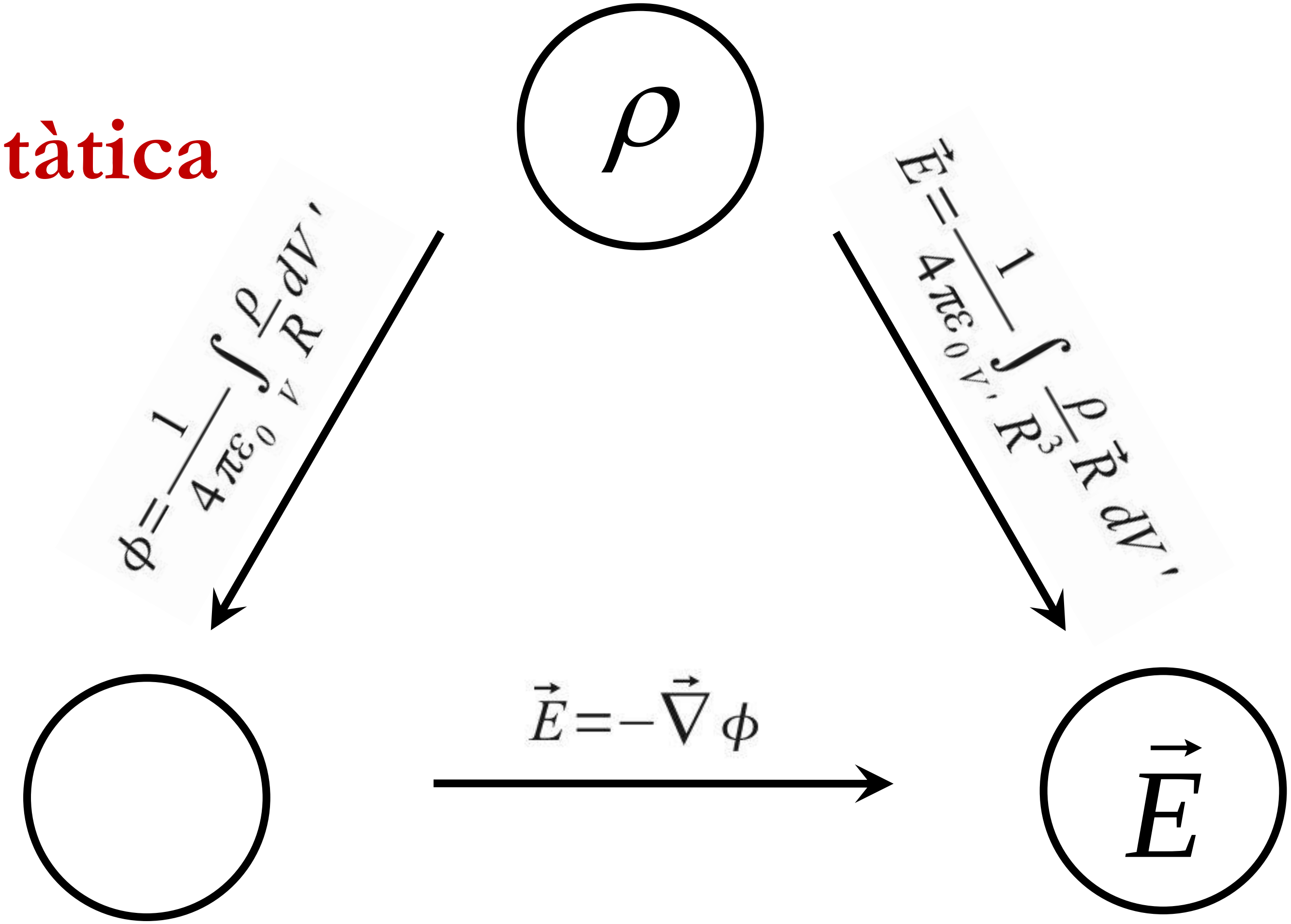
2.5. Potencial electrostàtic

Problema habitual en electrostàtica

- Les tres magnituds fonamentals en electrostàtica són: ρ, ϕ, $\boldsymbol{E}$.
- PROBLEMA PLANTEJAT: Donada una distribució de càrrega ρ, quin és el camp elèctric $\boldsymbol{E}$ que crea?
- Si hi ha simetria: llei de Gauss.
- En el cas més general: $\rho \rightarrow \phi \rightarrow \boldsymbol{E}$ (int. + deriv.)
- També: $\rho \rightarrow \boldsymbol{E}$ (integració directa).

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

RESUM d’electrostàtica



Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall.1999; 3a ed. Fig. 2.35

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

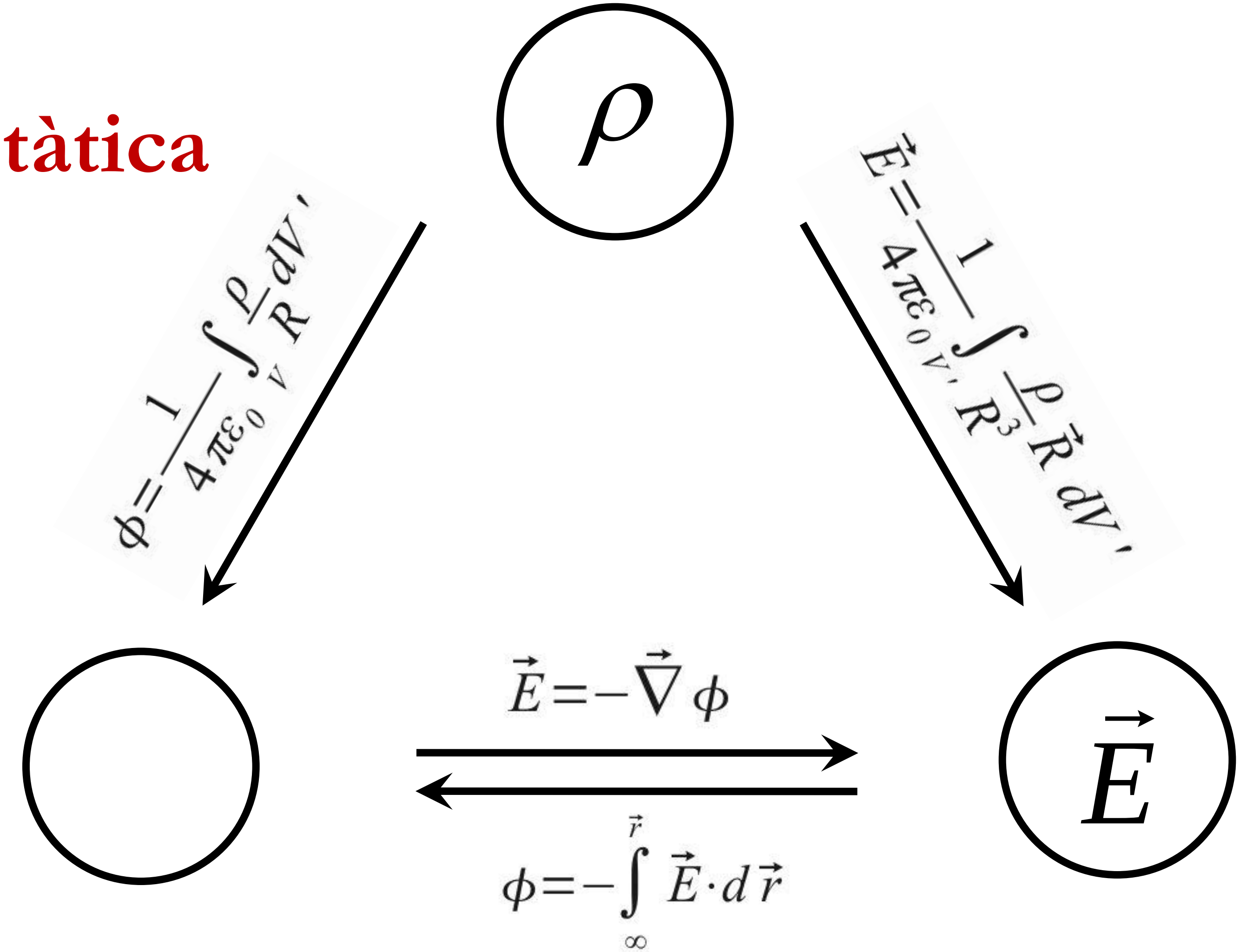
2.5. Potencial electrostàtic

Problema habitual en electrostàtica

- Les tres magnituds fonamentals en electrostàtica són: ρ, ϕ, $\boldsymbol{E}$.

- El potencial es pot calcular per integració del camp elèctric (ϕ a partir de $\boldsymbol{E}$).

RESUM d'electrostàtica



Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall.1999; 3a ed. Fig. 2.35

2.5. Potencial electrostàtic

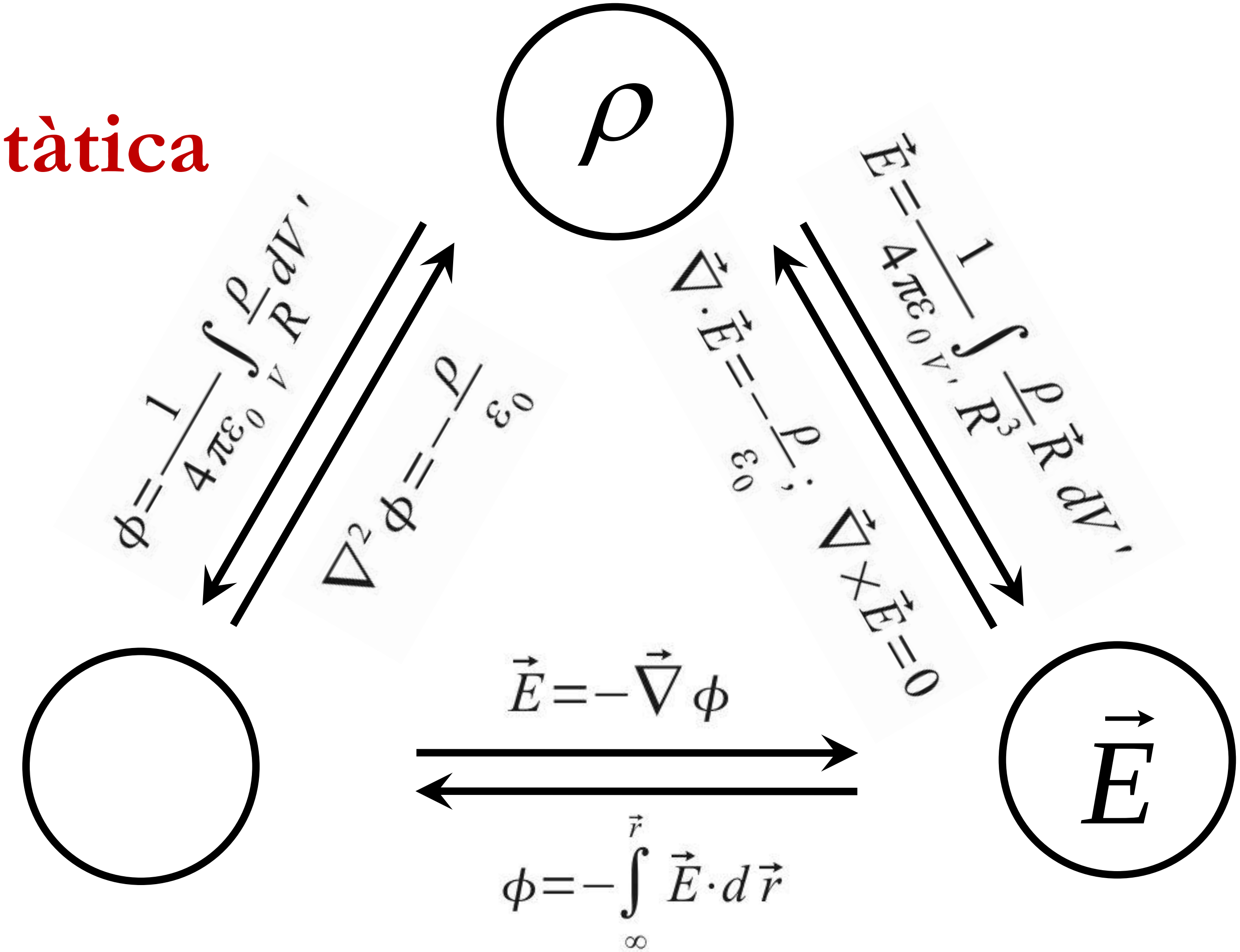
Problema habitual en electrostàtica

- Les tres magnituds fonamentals en electrostàtica són: ρ, ϕ, $\boldsymbol{E}$.

Queden finalment:

- L'equació de Poisson (ϕ a partir de ρ)
- L'expressió de les fonts del camp elèctric (ρ a partir de $\boldsymbol{E}$).

RESUM d’electrostàtica



Griffiths, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall.1999; 3a ed. Fig. 2.35

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.6. Conductors en equilibri electrostàtic

Exemples

- Escorça esfèrica amb una densitat de càrrega σ.