1. Les fonts del camp electromagnètic

1.1 Donada la superfície equipotencial $x^2 - y^2 + 2y + z^2 = 2$, trobeu l'expressió general del vector unitari normal a la superfície. Calculeu els vectors concrets en els punts de tall amb els eixos X i Z i en els punts (0,1,1) i (1,0,1).

1.2 Sent $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)\vec{u}_x + (x^4 - y^2 - z^2)\vec{u}_y + (xyz)\vec{u}_z$, calculeu la funció que proporciona la divergència i el rotor, determinant el seu valor en els punts (2,3,0) i (2,3,-2) i analitzant el seu significat.

1.3. Expresseu $\nabla\varphi(r)$ en funció de les derivades de $\varphi(r)$ sent $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Apliqueu-ho als casos $\varphi(r) = \ln r$ i $\varphi(r) = r^{-n}$ $(n > 0)$.

1.4. Obteniu la divergència del camp $\vec{r}/r^3$ i interpreteu el resultat.

1.5. Calculeu $\nabla^2 \ln r$, sent $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculeu també $\nabla^2 r$, sent $r = |x|$.

1.6. La densitat de corrent d'una distribució de càrregues ve donada per:

$$\boldsymbol{J}(r,t) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi a^2}\dfrac{e^{-t/\tau}}{\tau}\vec{u}_r & \text{si } r \le a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

sent q, a i τ constants.

a) Obteniu la densitat de càrrega associada, sabent que satisfà la condició de tendir a zero quan $t >> \tau$.
b) Escriviu l'equació de continuïtat en forma diferencial i integral, i comproveu que se satisfà per a un volum esfèric amb $r < a$.

1.7. Una esfera de radi a, que té una densitat superficial de càrrega σ, es posa en rotació al voltant d'un dels seus diàmetres amb una velocitat angular ω.
a) Calculeu la densitat superficial de corrent.
b) Determineu la intensitat de corrent que circula entre dues colatituds α i β, i la intensitat total.

1.8. La densitat de corrent d'una distribució de càrregues ve donada per:

$$\boldsymbol{J}(r,t) = \begin{cases} \dfrac{q}{a^5}\dfrac{e^{-t/\tau}}{\tau} r(a^2 - r^2)\vec{u}_r & \text{si } r \le a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

sent q, a i τ constants.

a) Obteniu la densitat de càrrega associada, sabent que satisfà la condició de tendir a zero quan $t >> \tau$.
b) Determineu la variació temporal de la densitat de càrrega en l'origen, per a $t = \tau$.
c) Calculeu la càrrega continguda en l'esfera de radi *a/2*.

Problemes addicionals

1.9. Demostreu que, per a tota funció escalar *f*, es compleix que $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0$ (en coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques).

1.10. Demostreu que, per a tota funció vectorial $\vec{A}$, es compleix que $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$ (en coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques).

1.11 Demostreu que, per a tot camp radial $\vec{A}= f(r)\,\vec{u}_r$, es compleix que $\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$ (aleshores és conservatiu).

1.12 Donat un camp vectorial $\vec{A}=k\,y\vec{u}_x$ (*k* constant), dibuixeu les línies de camp i calculeu el seu rotor, comprovant que $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$. És coherent la forma del camp amb la idea intuïtiva que un camp amb un rotor no nul té terbolins?

1.13 Donat un camp vectorial $\vec{A}=\frac{1}{r}\vec{u}_\varphi$, calculeu el seu rotor i comproveu que es compleix el teorema de Stokes en una semiesfera.

1.14 Calculeu $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)$.

1.15 Una esfera de radi *a* té una distribució volumètrica de càrrega amb simetria radial donada per

$$\rho(r)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0<r<a\text{-}d \\ \rho_0 & \text{si} \quad a\text{-}d<r<a \end{cases}$$

Es tracta, per tant, d'una escorça de gruix *d*. Si $d<<a$, es demana calcular la densitat superficial de càrrega de l'escorça carregada.

1.16 En una regió de l'espai amb forma esfèrica hi ha una densitat de càrrega uniforme que canvia amb el temps en la forma $\rho(t)=k\cdot t$ (*k* contant). Suposant que el flux de càrrega té simetria radial, trobeu la densitat de corrent en cada punt i el corrent que travessa la superfície exterior del volum considerat.