Tema 6: DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR DEL POTENCIAL VECTOR

Tema 6: DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR DEL POTENCIAL VECTOR

BIBLIOGRAFIA

Griffiths	Tema 5
Jackson	Tema 5
Pomer	Tema 5
Wangness	Tema 20

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

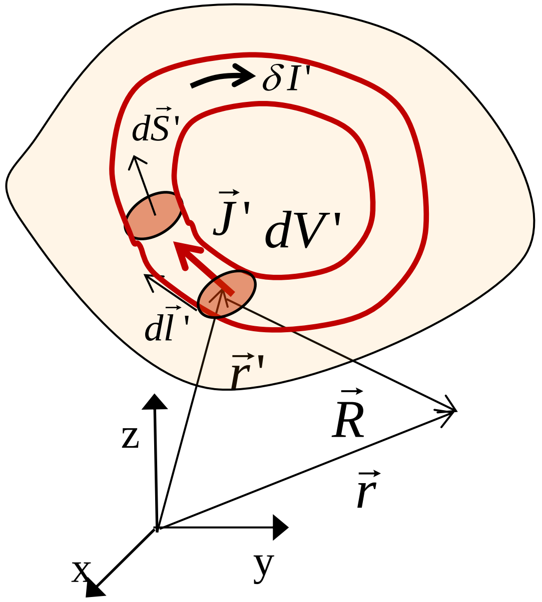
6.1. Introducció

Plantejament

- Serà similar al fet en el desenvolupament del potencial elèctric.
- El potencial vector magnètic: $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}'(\vec{r}\,')}{R}dV'$$
- Prop de la densitat ***J***, el potencial i el camp magnètic depenen dels detalls fins del corrent i de la geometria.
- A mesura que ens allunyem, els detalls perden importància (exemple: medis materials).
- Molt lluny ($\left|\vec{r}\right| \to \infty$) la densitat de corrent es veu com si fóra una espira menuda; el camp magnètic i el potencial vector són els d'una espira puntual.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.1. Introducció



Plantejament

- Pretenem estudiar el comportament a mitjanes i grans distàncies d'una distribució arbitrària de corrent:

  − en funció d'elements simples i puntuals;

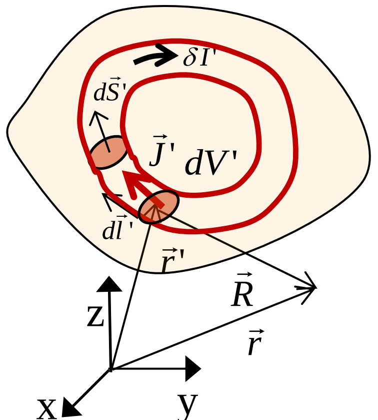
  − que donen compte de certs aspectes característics de la distribució de corrent;

  − que siguen fàcils de calcular.

- Aqueixos elements $\rightarrow$ ***MULTIPOLS MAGNÈTICS***

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOL

6.1. Introducció



Plantejament

- <u>Com obtindrem aqueixos elements</u>? Per al potencial vector creat per una distribució de corrents:

  > suposarem la distribució prop de l'origen (*r´ ~ 0*).

  > desenvoluparem en sèrie de Taylor el terme *1/ R*

  > obtindrem el potencial vector en potències de *r*

- <u>Quines aplicacions</u> té el desenvolupament multipolar del potencial magnètic?

  − representació de medis materials

  − representació del camp magnètic de la terra (satèl·lits)

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.1. Introducció

APLICACIÓ dels multipols magnètics: estudi de la matèria

- Objectiu general: a partir d'elements a escala microscòpica, descriure la matèria a escala macroscòpica. Especial aplicació en materials magnètics.

- Mètode: relacionant els termes del desenvolupament que se suposa que estan relacionats amb els aspectes característics de la distribució de corrents...

  ... amb les característiques microscòpiques específiques de la matèria (corrents microscòpics que constitueixen els materials).

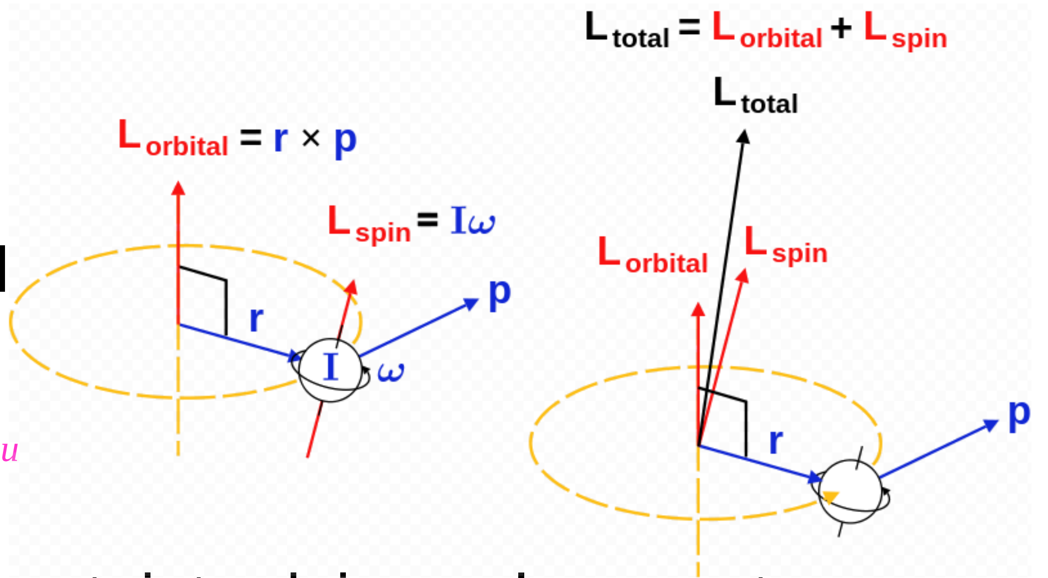
- Finalment: determinar el potencial vector que creen aqueixos elements a grans distàncies i les seues característiques.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.1. Introducció

Plantejament

- NOTA: En materials magnètics, l'orientació i el sentit dels corrents microscòpics són fonamentals i depenen de les carac-terístiques del material



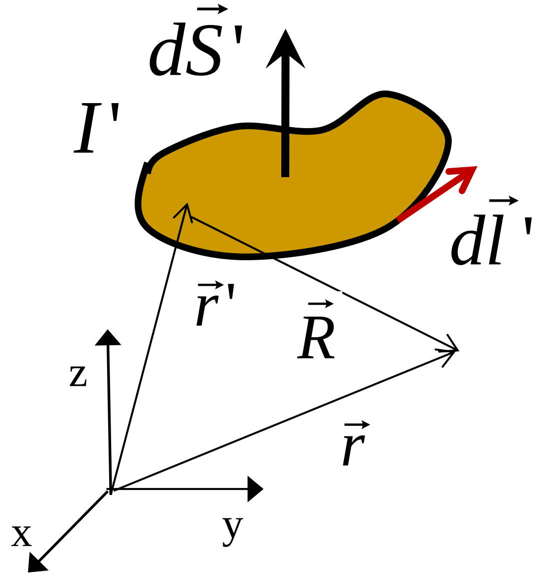
http://www.quantumdiaries.org/2011/09/17/angular-momentum-in-quantum-mechanics/

- Previ al desenvolupament, introduirem el concepte de dipol magnètic, ja que apareixerà com un dels termes del desenvolupament.

EL DIPOL MAGNÈTIC

Tema 6: DESENVOL. MULTI

6.2. El dipol magnètic



Definició

- Dipol magnètic finit = espira filiforme.
- El concepte de dipol magnètic no és tan intuïtiu com l'elèctric (el nom deriva de la semblança en les equacions).
- El nom té sentit si a un dipol magnètic, li assignem dos pols: el pol nord a la zona d'on ixen les línies de camp, el pol sud a la zona per on entren les línies de camp.
- Considerarem una espira (corrent filiforme tancat), de forma arbitrària però plana, amb superfície *S'*.
- El potencial vector magnètic en un punt ***r***:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{L'} \frac{d\vec{l}'}{R}$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

Generalització T. Stokes

amb

$$\vec{A} = \Psi \vec{u}$$

$$|\vec{u}| = 1$$

u: *mòdul i direcció arbitraris però constants*

Definició

- Demostrarem que: $\displaystyle\int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla}\Psi = \oint_{L(S)} \Psi \, d\vec{l}$

- Partirem de: $\displaystyle\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \Psi \vec{u} = \left(\vec{\nabla}\Psi\right) \times \vec{u} + \Psi\left(\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{u}}\right) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\vec{\nabla}\Psi\right) \times \vec{u}$$

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\vec{\nabla}\Psi\right) \times \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{u}$$

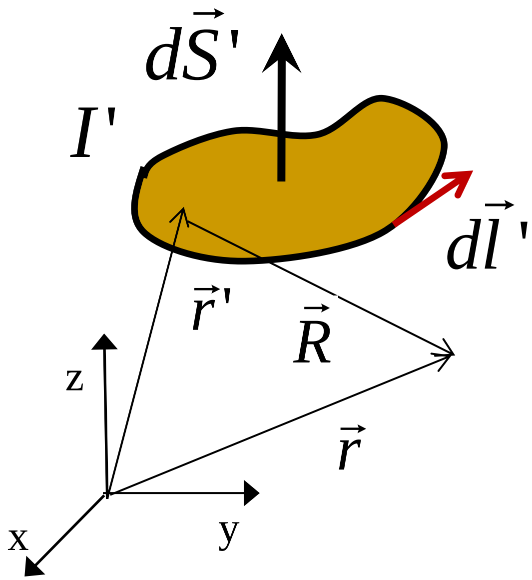
com que la direcció de ***u*** és arbitrària:

$$\int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{u} = \oint_{L(S)} \Psi \vec{u} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{u} \cdot \int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla}\Psi = \vec{u} \cdot \oint_{L(S)} \Psi \, d\vec{l}$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} \frac{d\vec{l}\,'}{R}$$



Definició

- En el nostre cas, ho aplicarem a:

$$\oint_{L'} \frac{1}{R}\, d\vec{l}\,' = \int_{S'(L')} d\vec{S}\,' \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right)$$

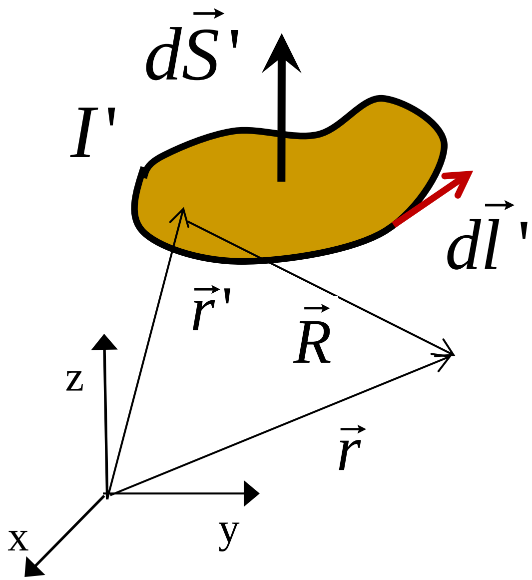
- Per tant:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} \frac{1}{R}\, d\vec{l}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{S'(L')} d\vec{S}\,' \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{S'} d\vec{S}\,' \times \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic



Definició

- En punts llunyans podem suposar que la superfície *S'* es veu molt menuda, tal que:
  - El terme *R*/*R*^{3} es pot considerar constant:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{S'} d\vec{S}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \cong \frac{\mu_0}{4\pi} I' \left[\left(\int_{S'} d\vec{S}' \right) \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right]$$

  - Així, el potencial vector: $\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} I' \left(\vec{S}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

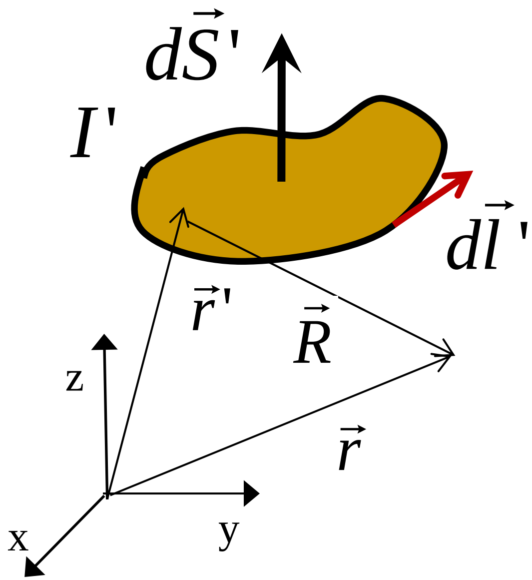


Fig. 26.02ª Tipler 5ª ed.

Definició

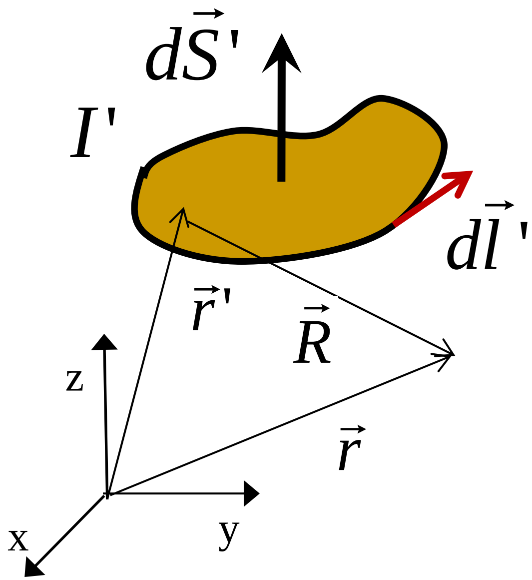
- El **moment dipolar magnètic** d'un dipol magnètic **finit** (espira finita) es defineix com: $\vec{m} = I'\cdot\vec{S}'$
  - és un vector
  - mòdul *m* = *I'·S'*
  - direcció: regla mà dreta, regla de Maxwell o cargol

- Introduïm el concepte de dipol magnètic **puntual**:
  - com una nova entitat, de caràcter puntual
  - es caracteritza per: $$\vec{m} = \lim_{\substack{S'\to 0 \\ I'\cdot S' = cte}} I'\cdot\vec{S}'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} I' \left(\vec{S}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$



Definició

- Per tant, el potencial vector d'un dipol magnètic és:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

– depèn de r^{-2}: $\vec{A}(\vec{r}) = f\left(\frac{1}{r^2}\right)$

– ***Aquesta expressió és una aproximació per al dipol finit, però és exacta per al dipol puntual.***

- Es pot comprovar que: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m(\vec{r}) = 0$

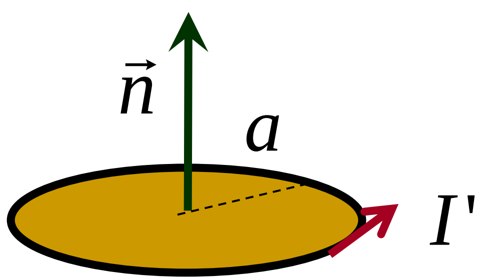
Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

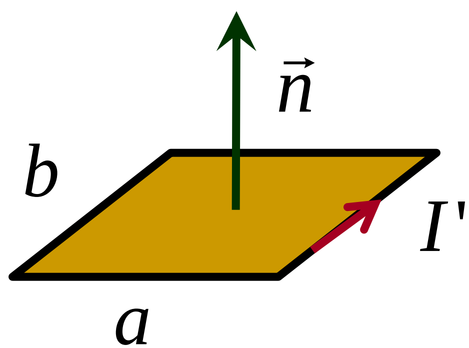
6.2. El dipol magnètic

Definició

- EXEMPLES: Per a espires circulars o rectangulars:

$$\vec{m} = I' \cdot \vec{S}' = I' \pi a^2 \vec{n} \qquad \vec{m} = I' \cdot \vec{S}' = I' a \cdot b \, \vec{n}$$





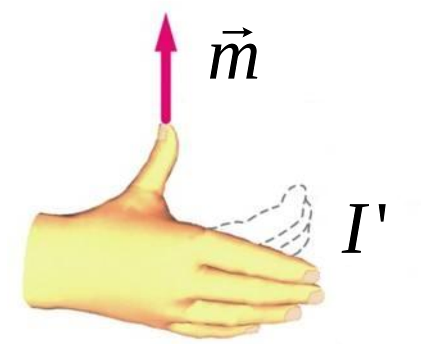


Figura 26.2 Tipler 5ª Ed.

- La <u>direcció</u> de ***m*** és la perpendicular al plànol de l'espira ***n***.
- El <u>sentit</u> ve donat per la regla de la mà dreta en relació amb el corrent elèctric *I*.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

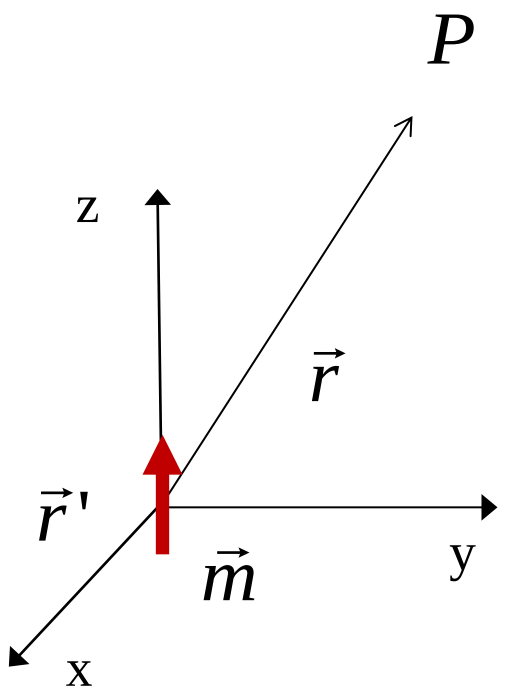
6.2. El dipol magnètic

Característiques del potencial d'un dipol *m*

- Dipol **puntual** en l'origen:

$$\vec{R} = \vec{r}$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$



Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

Característiques del potencial d'un dipol *m*

- Dipol **puntual** en l'origen:

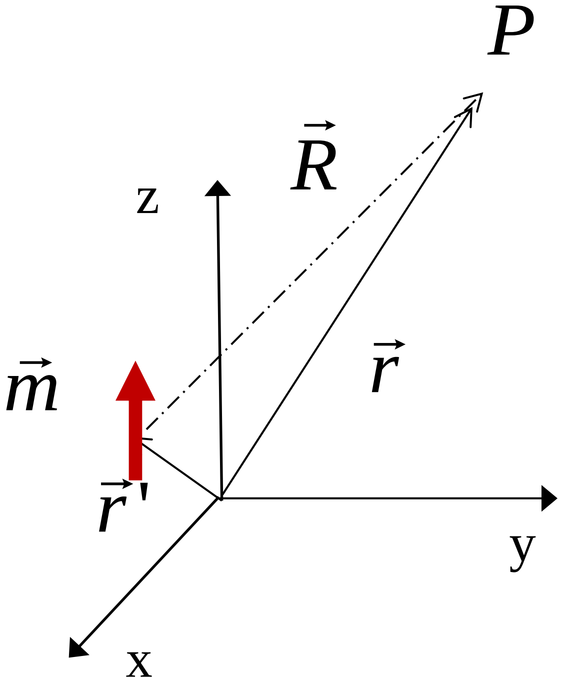
$$\vec{R} = \vec{r}$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

- Dipol fora de l'origen:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

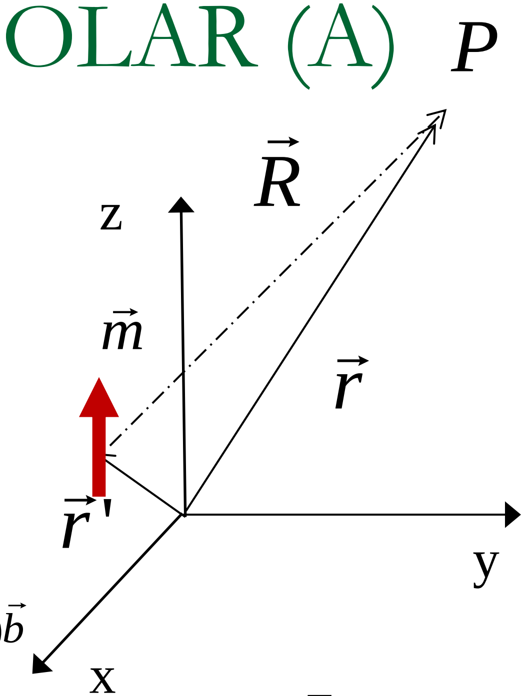


6.2. El dipol magnètic

CAMP MAGNÈTIC D'UN DIPOL

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic



Camp magnètic d'un dipol *m*

- El camp magnètic d'un dipol:

$$\vec B_m(\vec r)=\vec\nabla\times\vec A_m(\vec r)=\vec\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec m\times\vec R}{R^3}\right)$$

- Operant: $\vec\nabla\times(\vec a\times\vec b)=\vec a(\vec\nabla\cdot\vec b)-\vec b(\vec\nabla\cdot\vec a)+(\vec b\cdot\vec\nabla)\vec a-(\vec a\cdot\vec\nabla)\vec b$

$$\vec\nabla\times\left(\frac{\vec m\times\vec R}{R^3}\right)=\left[\underbrace{\vec m\left(\vec\nabla\cdot\frac{\vec R}{R^3}\right)}_{=\vec m\,4\pi\delta(\vec R)=0}-\frac{\vec R}{R^3}\cancel{\left(\vec\nabla\cdot\vec m\right)}+\cancel{\left(\frac{\vec R}{R^3}\cdot\vec\nabla\right)\vec m}-\left(\vec m\cdot\vec\nabla\right)\frac{\vec R}{R^3}\right]=$$

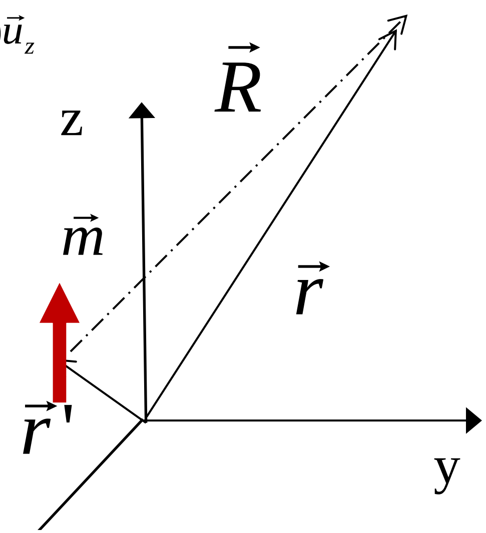
− la funció delta val zero en punts exteriors al dipol

− els altres dos termes són zero perquè ***m*** és constant

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

$$\vec{R} = (x - x')\vec{u}_x + (y - y')\vec{u}_y + (z - z')\vec{u}_z$$



Camp magnètic d'un dipol *m*

- El terme que queda:

9 termes

$$-\left(\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{R}}{R^3} = -\left(m_x\frac{\partial}{\partial x} + m_y\frac{\partial}{\partial y} + m_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

per a ∂/∂x:

$$m_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{R}\frac{1}{R^3}\right) = m_x\left(\frac{\vec{u}_x}{R^3} + \vec{R}\frac{(-3/2)2(x-x')}{R^5}\right)$$

- Completant els termes i reagrupant, s'arriba a:

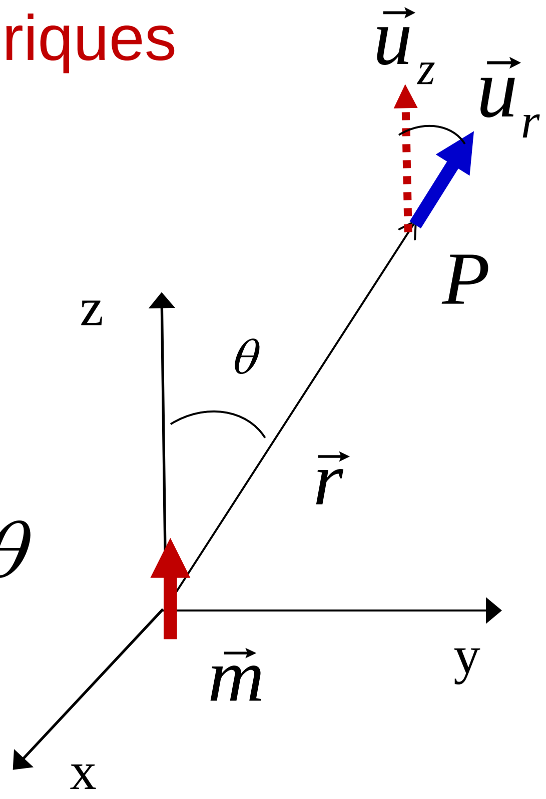
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{m}\cdot\vec{R}\right)\vec{R} - \vec{m}\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right)}{R^5}$$

- Expressió formalment idèntica a la del camp elèctric creat per un dipol elèctric.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

Camp magnètic d'un dipol ***m*** en coord. esfèriques



- Si el dipol està en l'origen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}(\vec{r}\cdot\vec{r})}{r^5}$$

- Si el dipol està al llarg de l'eix *Z*:

$$\vec{m} = m_0 \vec{u}_z \qquad \vec{r} = r\,\vec{u}_r \qquad \vec{m}\cdot\vec{r} = m_0 r \cos\theta$$

- Camp magnètic:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(m_0 \cos\theta)\vec{u}_r - \vec{m}}{r^3}$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

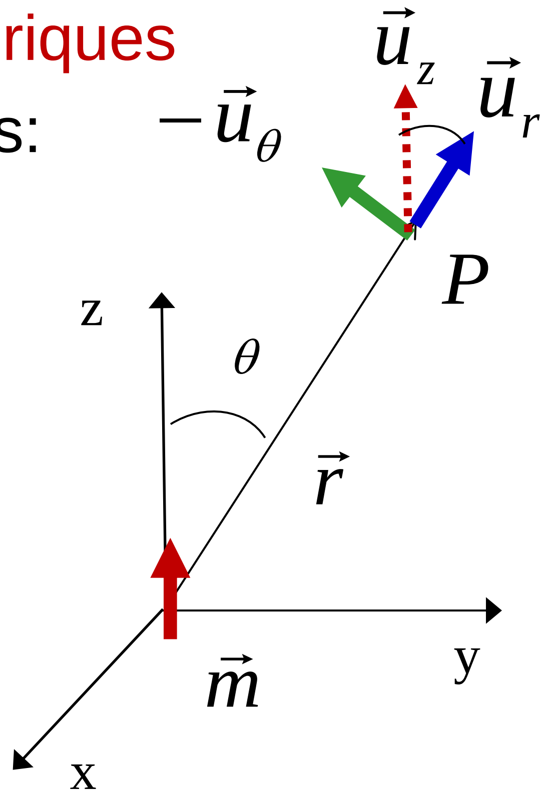
6.2. El dipol magnètic

Camp magnètic d'un dipol ***m*** en coord. esfèriques

- En funció de les coordenades esfèriques:

$$\vec{m} = m_0 \vec{u}_z$$

$$\vec{m} = m_0 \left(-\cos\theta \, \vec{u}_r + \sin\theta \, \vec{u}_\theta \right)$$



- Camp magnètic:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 m_0 \cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 \sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

Característiques del camp magnètic d'un dipol *m*

- SEMBLANCES del camp creat per un dipol magnètic amb el cas electrostàtic.

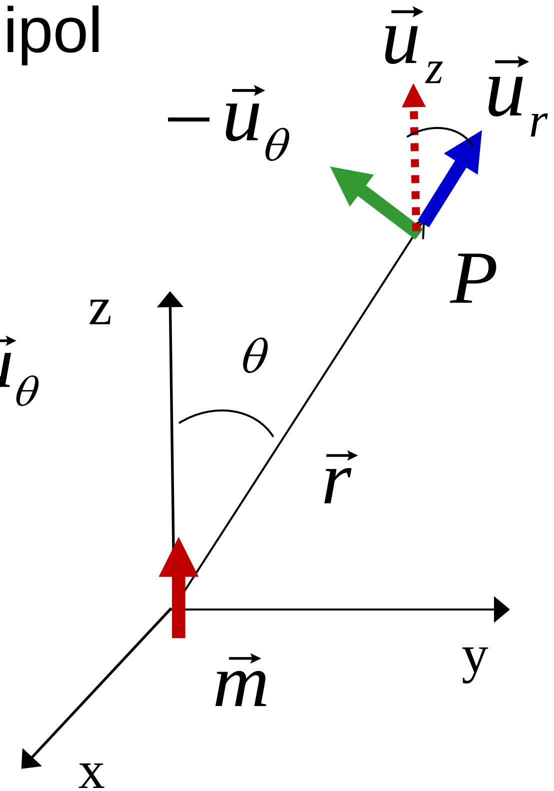
- El camp ***B*** té component radial i polar:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m_0\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_0\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta$$

- Depèn de r^{-3}:

$$B(\vec{r}) = f\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

- Té simetria de revolució amb l'eix en ***m***.



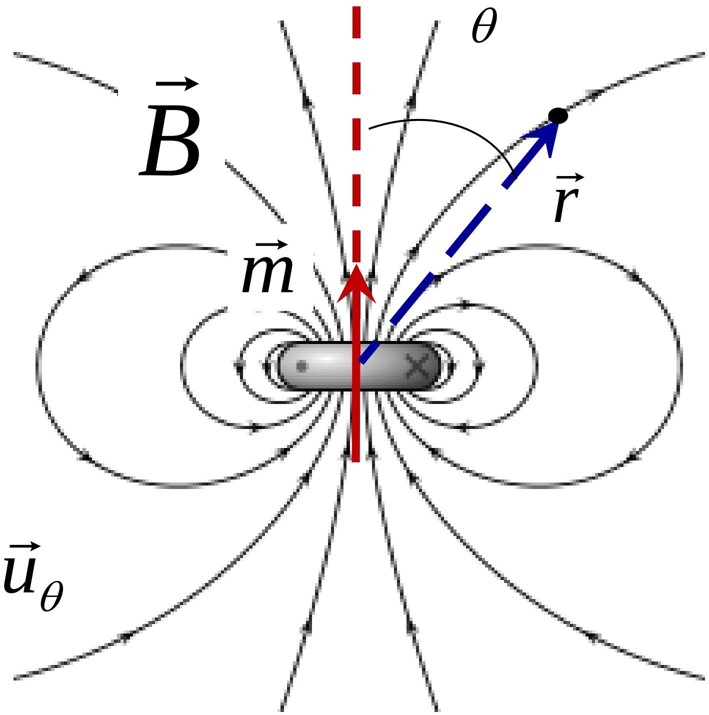
Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

Camp magnètic d'un dipol *m* en coord. esfèriques

- Gràficament:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(m\cos\theta)\vec{u}_r - \vec{m}}{r^3}$$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m_0\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_0\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta$$

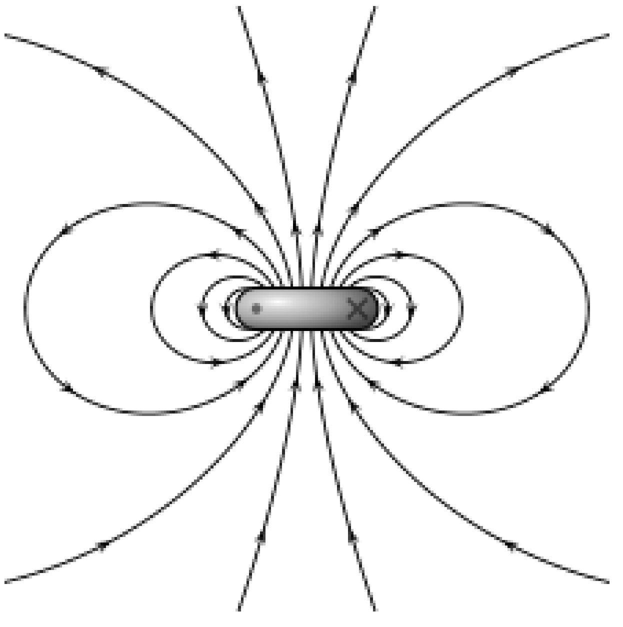
http://en.wikipedia.org/wiki/Dipole

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

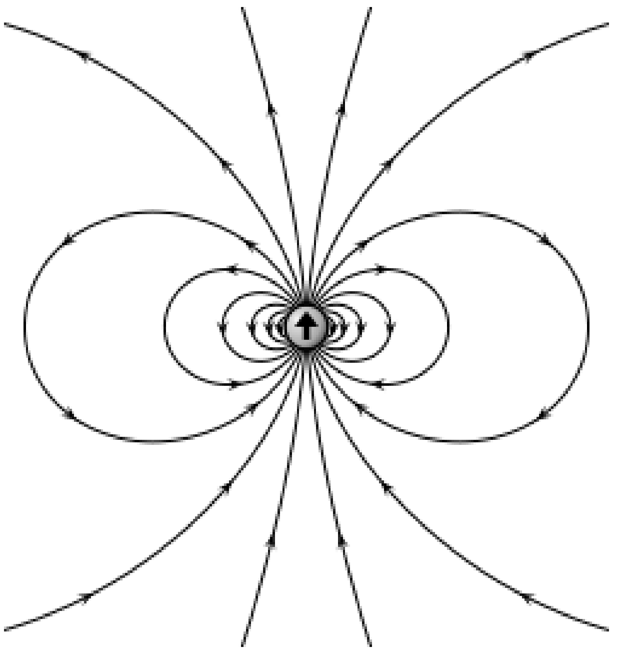
6.2. El dipol magnètic

Camp magnètic d'un dipol *m*

- Diferència entre el camp d'un dipol finit i d'un puntual:



Dipol magnètic finit



Dipol magnètic puntual

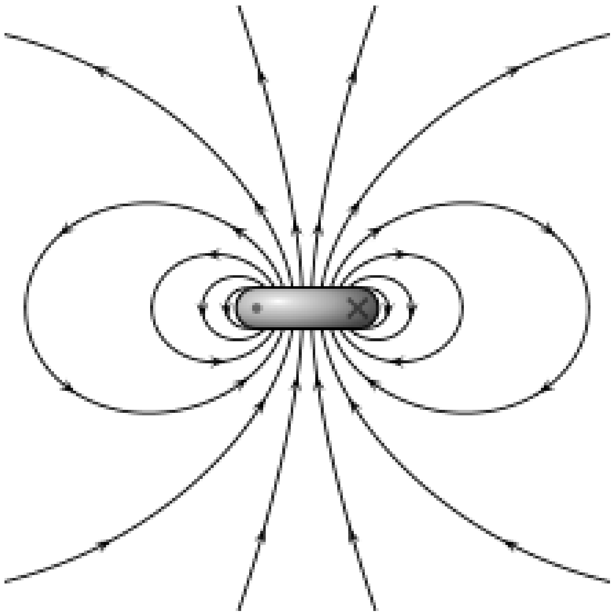
http://en.wikipedia.org/wiki/Dipole

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.2. El dipol magnètic

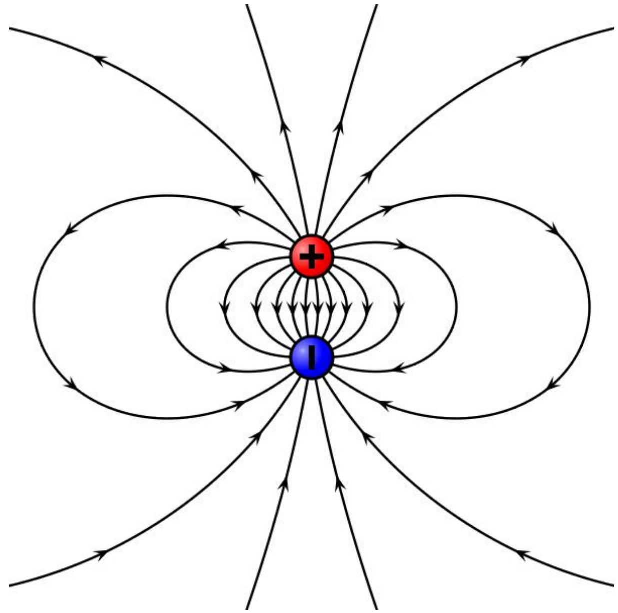
Camp magnètic d'un dipol *m*

- Diferència entre el camp elèctric i magnètic d'un dipol



Dipol magnètic finit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$



Dipol elèctric finit

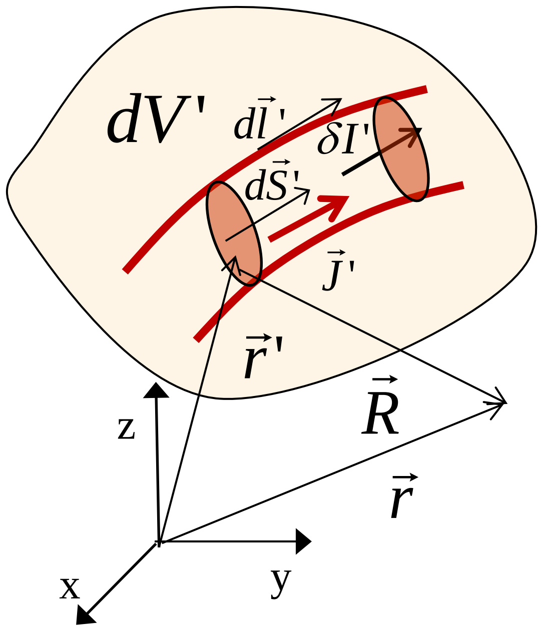
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

DESENVOLUPAMENT MULTIPOLAR

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector



Desenvolupament

- Considerem una distribució de corrents volumètriques *J.*
- El potencial vector:

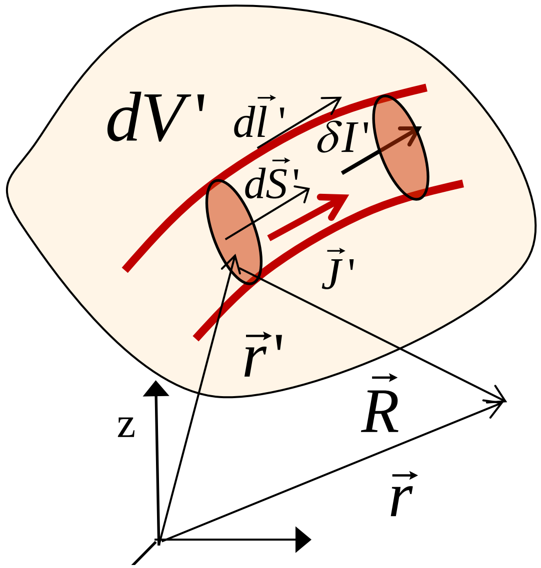
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}\,'(\vec{r}\,')}{R} dV'$$

- Suposarem la distribució prop de l'origen i el càlcul del potencial fora de la distribució.
- Desenvolupant en sèrie de Taylor:

$$\left.\begin{array}{l} \text{− vector r' (punts font) menut (r´ ~ 0).} \\ \text{− vector r (punt camp) gran } (r) \end{array}\right\} \quad r' << r$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector



Desenvolupament:

- Recordem que:

$$R = \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}\,')\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,')}$$

$$= r\sqrt{1 \underbrace{- \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}_{x}}$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

- Desenvolupant en sèrie de Taylor (només $O(r')$ i $O(r'^2)$):

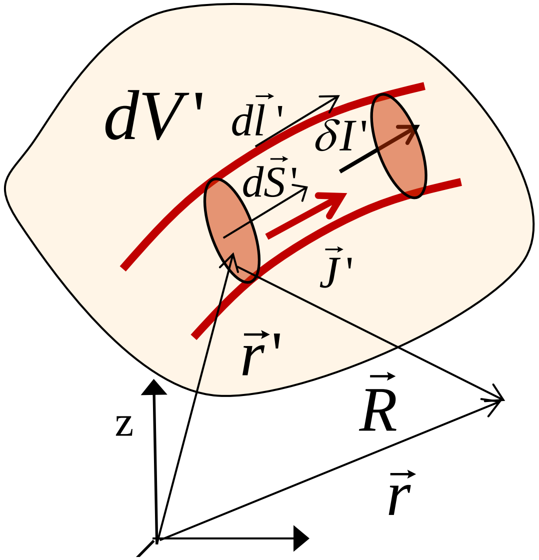
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \frac{1}{2}\,\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2 - r^2\cdot r'^2}{r^5} + \dots$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

Desenvolupament

- Introduint en l'expressió del potencial:



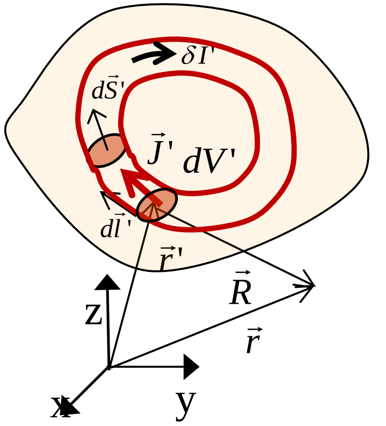
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\,'(\vec{r}\,')}{R}\,dV' \cong$$

$$\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\,'(\vec{r}\,')\left[\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2-r^2\cdot r'^2}{r^5}+\ldots\right]dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}^{(1)}(\vec{r})+\vec{A}^{(2)}(\vec{r})+\vec{A}^{(3)}(\vec{r})+\ldots$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOL

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vec



Termes

$$\vec{J}'(\vec{r}')dV' = \rho'\vec{v}'dV' = \frac{dq'}{dV'}\frac{d\vec{l}'}{dt}dV' = \frac{dq'}{dt}d\vec{l}' = \delta I' d\vec{l}'$$

1r terme = terme monopolar

$$\boxed{\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = 0}$$

- S'obté en traure *r* de la integral:

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}'(\vec{r}')}{r}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\oint_{C'}\delta I' d\vec{l}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int\delta I'\oint_{C'}d\vec{l}' = 0$$

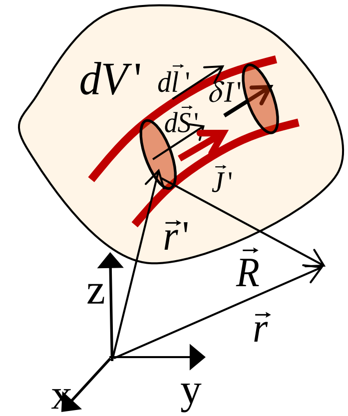
− Recordem que un corrent distribuït en volum equival a un conjunt de fils elementals tancats amb corrent $\delta I'$

− Com que és un recorregut tancat, la integral de dl' és zero.

- El 1r terme (terme monopolar) queda: $\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = 0$
- Interpretació: no existeixen els monopols magnètics.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOL

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vec



Termes

2n terme = terme dipolar

$$\boxed{\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$$

- S'obté en operar en la integral:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}\vec{J}\,'(\vec{r}\,')dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int_{V'}\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\,\vec{J}\,'(\vec{r}\,')dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\oint_{C'}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\delta I'\,d\vec{l}\,'$$

- Treballant el producte escalar:

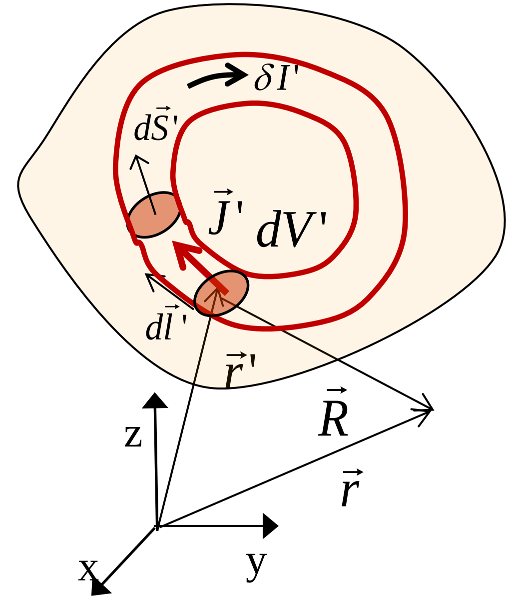
$$d\vec{l}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') = \frac{1}{2}\left(2d\vec{l}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[d\vec{l}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') + \vec{r}\,'(d\vec{l}\,'\cdot\vec{r})\right] + \frac{1}{2}\left[d\vec{l}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') - \vec{r}\,'(d\vec{l}\,'\cdot\vec{r})\right]$$

Sumant i restant

Tema 6: DESENVOL. MULT

6.3. Desenvolupament multipolar del poter



Termes

<u>2n terme = terme dipolar</u>

- El <u>primer parèntesi</u> es pot posar com:

$$d\vec{l}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')+\vec{r}\,'(d\vec{l}\,'\cdot\vec{r})=d\vec{r}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')+\vec{r}\,'(d\vec{r}\,'\cdot\vec{r})=$$

$$=d\vec{r}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')+\vec{r}\,'d(\vec{r}\,'\cdot\vec{r})=d(\vec{r}\,'(\vec{r}\,'\cdot\vec{r}))$$

− ja que en realitat *dl'* = *dr'* i *r* és una constant (respecte a coordenades amb ') amb diferencial zero.

− essent un diferencial exacte, la seua integral de línia és zero:

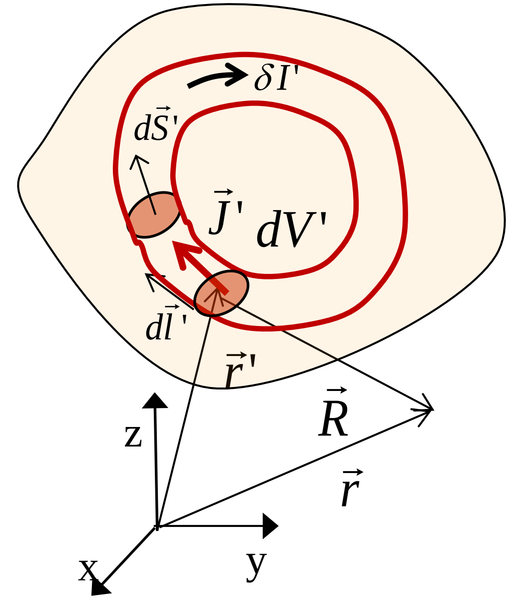
$$\oint_{C'} d(\vec{r}\,'(\vec{r}\,'\cdot\vec{r}))=0$$

Tema 6: DESENVOL. MULT

6.3. Desenvolupament multipolar del poter

Termes

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$



2n terme = terme dipolar

- El segon parèntesi es pot posar com un doble producte vectorial:

$$d\vec{l}\,'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')-\vec{r}\,'(d\vec{l}\,'\cdot\vec{r})=(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')d\vec{l}\,'-(\vec{r}\cdot d\vec{l}\,')\vec{r}\,'=\vec{r}\times(d\vec{l}\,'\times\vec{r}\,')$$

  - per tant, la integral: $\displaystyle\oint_{C'}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\delta I'\,d\vec{l}\,'=0-\frac{1}{2}\oint_{C'}\vec{r}\times\vec{r}\,'\times\delta I'\,d\vec{l}\,'$

  - com r actua com una constant: $\displaystyle=0-\frac{1}{2}\vec{r}\times\oint_{C'}\delta I'\,\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,'$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

Termes

2n terme = terme dipolar

$$\boxed{\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$$

- L'expressió per al 2n terme del desenvolupament:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\vec{r}\times\frac{1}{2}\oint_{C'}\delta I'\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\oint_{C'}\delta I'\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,'\right]\times\vec{r}$$

- Expressió que permet introduir una **definició general** de moment dipolar:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_{C'}\delta I'\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,'$$

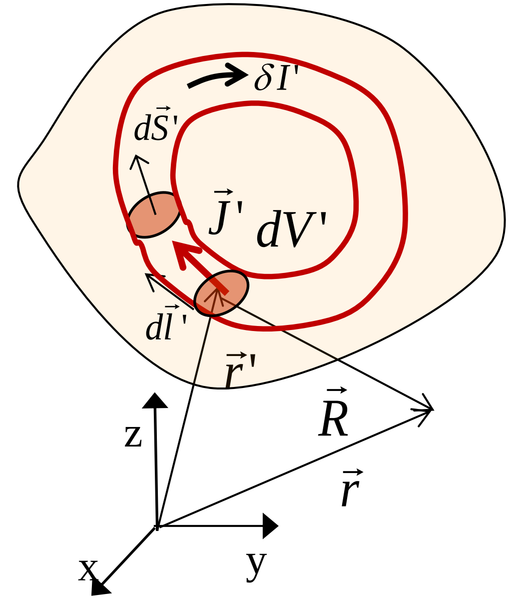
- Amb la qual, l'expressió per al 2n terme del potencial:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

Tema 6: DESENVOL. MULT

6.3. Desenvolupament multipolar del poter

Termes



<u>2n terme: moment dipolar d'una espira</u>:

- A partir de la definició de ***m***, podem obtenir l'expressió del moment dipolar per a diferents tipus de corrents.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_{C'} \delta I'\,\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,' = \int \delta I' \frac{1}{2}\oint_{C'} \vec{r}\,'\times d\vec{l}\,'$$

- Per a **una espira elemental**, amb corrent ***δI***:

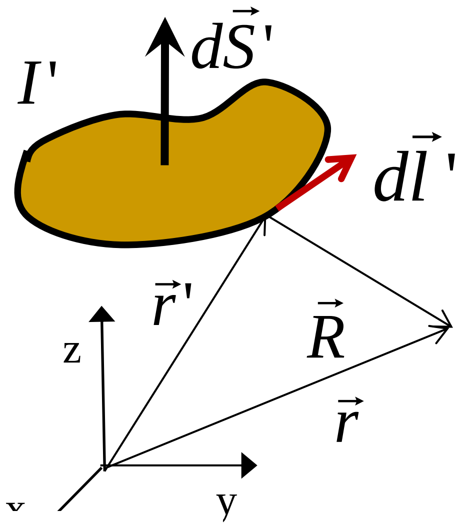
$$\delta\vec{m} = \delta I' \frac{1}{2}\oint_{C'} \vec{r}\,'\times d\vec{l}\,'$$

- Per a **una espira finita**, amb corrent ***I***:

$$\vec{m} = \int \frac{1}{2}\delta I \oint_{C'} \vec{r}\,'\times d\vec{l}\,' = \frac{1}{2} I \oint_{C'} \vec{r}\,'\times d\vec{l}\,'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector



Termes

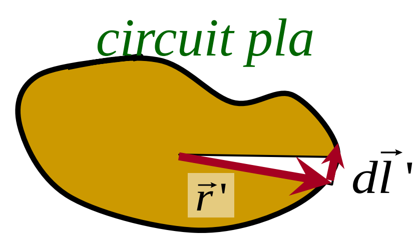
<u>2n terme: moment dipolar d'una espira</u>:

- Per a una espira finita, però plana:

$$\vec{m} = I'\frac{1}{2}\oint_{C'}\vec{r}'\times d\vec{l}' = I'\cdot\vec{S}'$$

− ja que en circuits plans el producte: $\frac{1}{2}\vec{r}'\times d\vec{l}' = d\vec{S}'$, i, per tant, la integral és l'àrea total:

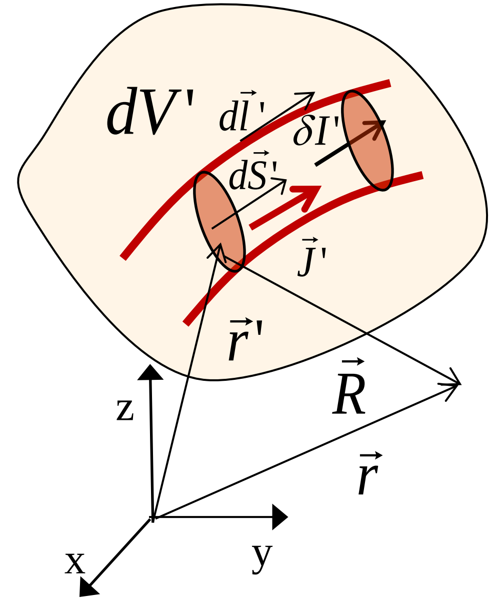
$$\frac{1}{2}\oint_{C'}\vec{r}'\times d\vec{l}' = \oint_{S'} dS'\vec{n} = \vec{S}'$$



− vector S': direcció perpendicular, sentit regla mà dreta

Tema 6: DESENVOL. MULT

6.3. Desenvolupament multipolar del poter



Termes

2n terme: moment dipolar d'una densitat ***J***:

- Per a **una densitat volumètrica *J***:

$$\vec{J}'(\vec{r}\,')dV' = \delta I'd\vec{l}\,'$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_{C'} \delta I'\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,' = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{r}\,'\times \vec{J}'(\vec{r}\,')dV'$$

- Per a **una densitat superficial *K***:

$$\vec{K}'(\vec{r}\,')dS' = \delta I'd\vec{l}\,'$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_{C'} \delta I'\vec{r}\,'\times d\vec{l}\,' = \frac{1}{2}\int_{S'} \vec{r}\,'\times \vec{K}'(\vec{r}\,')dS'$$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

Termes del desenvolupament

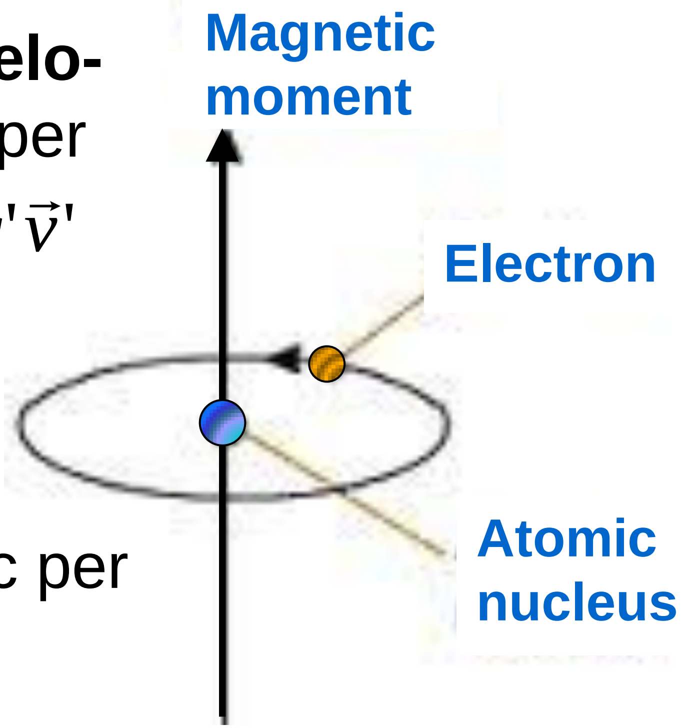
$$\vec{J}'(\vec{r}')dV' = \rho'\vec{v}'dV' = \frac{dq'}{dV'}\vec{v}'dV'$$

2n terme: moment dipolar d'una ***q en moviment:***

- Per a **una càrrega puntual amb velocitat *v***, partint de l'expressió de ***m*** per a ***J***: $\vec{J}'(\vec{r}')dV' = dq'\vec{v}'$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{r}'\times\vec{J}'(\vec{r}')\,dV' = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{r}'\times dq'\vec{v}'$$

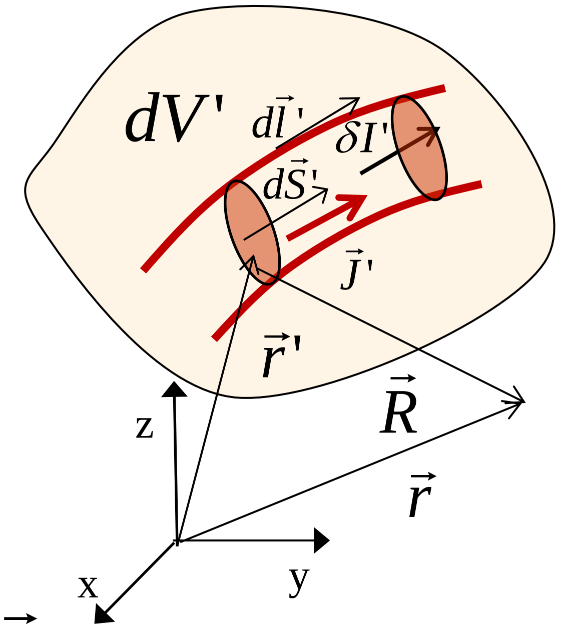
- Podem definir un moment magnètic per a *q'*: $\vec{m} = \frac{1}{2}q'\left(\vec{r}'\times\vec{v}'\right)$



http://www.tutorvista.com/content/chemistry/chemistry-iv/solid-state/magnetic-properties.php

Tema 6: DESENVOL. MULT

6.3. Desenvolupament multipolar del poter



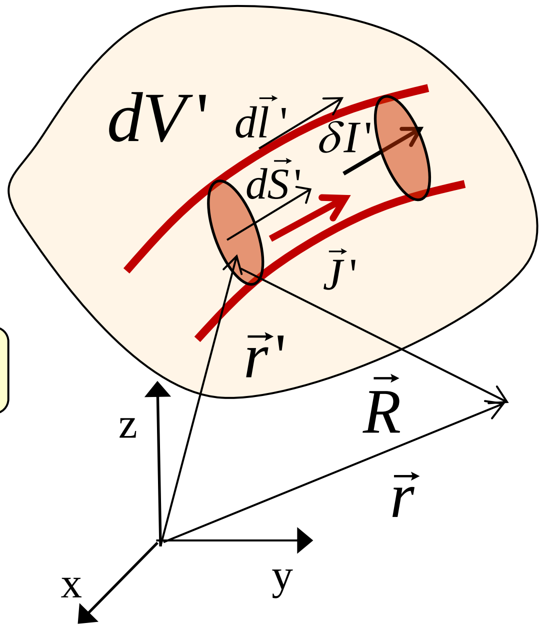
Termes del desenvolupament

<u>2n terme = terme dipolar</u> (RESUM)

- Independentment de quin siga l'origen de ***m***, el 2n terme del desenvolupament: $$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$
- El 2n terme representa el potencial que produiria un dipol magnètic de valor ***m*** situat en l'origen de coordenades. Depèn de $1/r^2$. Com que el 1r terme és zero, és dominant.
- Una distribució de corrents (o una espira, o una *q* amb *v*....) es comporta a grans distàncies com un dipol magnètic ***m*** en l'origen de coordenades.

Tema 6: DESENVOL. MULTI

6.3. Desenvolupament multipolar del potenc



Termes

3r terme = terme quadrupolar

- S'obté en operar en la integral:

9 termes

$$\vec{A}^{(3)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^5}\frac{1}{2}\int_{V'}\left(3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2 - r^2\cdot r'^2\right)\vec{J}'(\vec{r}\,')dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^5}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{x_i x_j}{2}\int_{V'}\left(3(x'_i\cdot x'_j) - (r')^2\delta_{ij}\right)\vec{J}'(\vec{r}\,')dV'$$

- És difícil de calcular i no el considerarem en aquest curs.

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

Termes

- Recordatori de la nomenclatura *x':*

$$\vec{A}^{(3)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^5}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{x_i x_j}{2}\int_{V'}\left(3(x'_i \cdot x'_j) - (r')^2\delta_{ij}\right)\vec{J}'(\vec{r}\,')dV'$$

$$x_1 = x \qquad x'_1 = x' \qquad \delta_{ii} = 1$$

$$x_2 = y \qquad x'_2 = y' \qquad \delta_{ij(i\neq j)} = 0$$

$$x_3 = z \qquad x'_3 = z'$$

$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} =$$

$$= (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3)^{1/2}$$

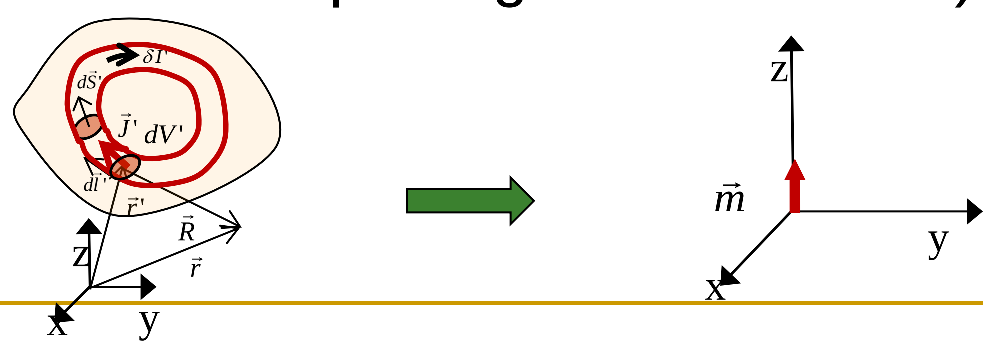
Delta de Kronecker

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

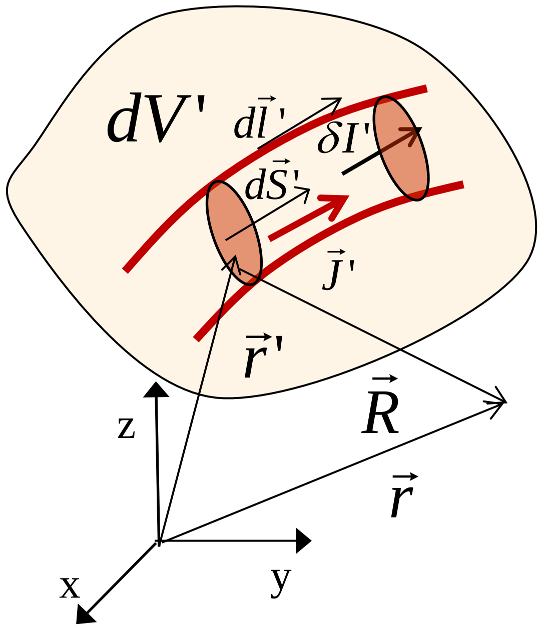
Significat del termes

- En el potencial vector magnètic només considerarem un terme (el primer és nul i el tercer, molt complicat).
- Per tant, representarem una distribució finita de corrents a grans distàncies per un dipol magnètic puntual ***m*** centrat en l'origen.
- Avantatge: hem trossejat el problema: 1r) Càlcul del moment dipolar ***m***; 2n) Càlcul del potencial magnètic creat per ***m*** (només vàlid per a grans distàncies).



Tema 6: DESENVOL. MULT

6.3. Desenvolupament multipolar del poter



Efecte de l'origen de coordenades

- Si una distribució de corrents està descrita pel seu terme dipolar:

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \vec{A}^{(2)}(\vec{r})$$

- Aquest terme és independent de l'origen de coordenades:

  − el moment dipolar és una característica intrínseca de la distribució de corrents;

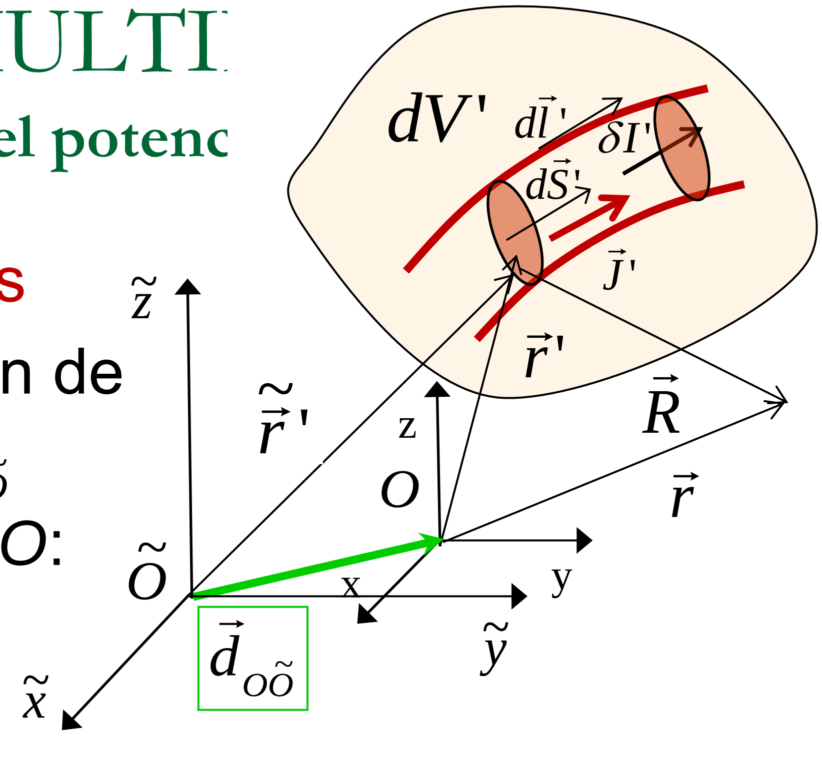
  − les característiques intrínseques o pròpies no depenen del sistema de coordenades.

- En electrostàtica: només quan terme monopolar era igual a zero.

Tema 6: DESENVOL. MULTI

6.3. Desenvolupament multipolar del potenc

Efecte de l'origen de coordenades



- Suposem translació de l'origen de coordenades: $\tilde{\vec{r}}\,' = \vec{r}\,' + \vec{d}_{O\tilde{O}}$
- El terme dipolar, respecte de *O*:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{r}\,' \times \vec{J}\,'(\vec{r}\,')\,dV'$$

- El terme dipolar, respecte de l'altre origen:

$$\tilde{\vec{m}} = \frac{1}{2}\int_{V'} \tilde{\vec{r}}\,' \times \vec{J}\,'(\vec{r}\,')\,dV' = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{r}\,' \times \vec{J}\,'(\vec{r}\,')\,dV' + \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{d}_{O\tilde{O}} \times \vec{J}\,'(\vec{r}\,')\,dV' = \vec{m}$$

- Podem veure que $\tilde{\vec{m}} = \vec{m}$, ja que: $\int_{V'} \vec{J}\,'(\vec{r}\,')\,dV' = 0$

Tema 6: DESENVOL. MULTIPOLAR (A)

6.3. Desenvolupament multipolar del potencial vector

Càlcul del camp magnètic

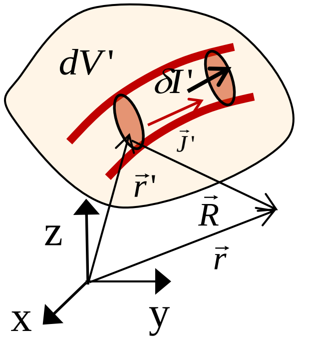
- Calculant el rotor del potencial vector:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \cong \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}^{(1)} + \vec{A}^{(2)} + \vec{A}^{(3)} + \ldots \right) =$$

$$= \vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)} + \vec{B}^{(3)} + \ldots$$

- Primer terme:

$$\vec{B}^{(1)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \vec{\nabla} \times 0 = 0$$



- Segon terme (com en l'espira):

$$\vec{B}^{(2)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$