http://www.wadsworthmedia.com/math/0534409865_stewart3c3/chapter13.html

Tema 1: INTRODUCCIÓ A L'ELECTROMAGNETISME

1.0. Càlcul vectorial

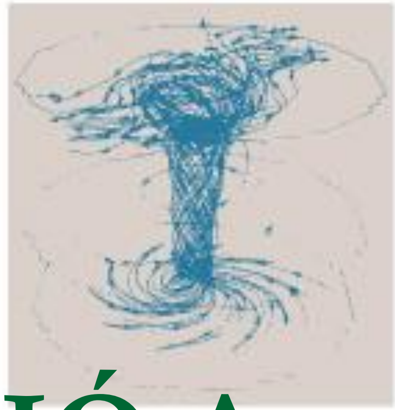
1.1. La interacció electromagnètica en la física

1.2. Càrregues i corrents

1.3. La conservació de la càrrega. Equació de continuïtat

1.4. Determinació unívoca d'un camp vectorial. Teorema de Helmholtz

http://www.wadsworthmedia.com/math/0534409865_stewart3c3/chapter13.html

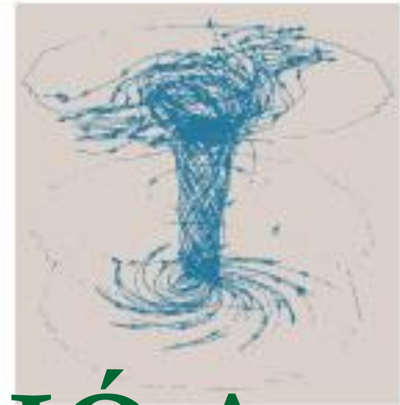


Tema 1: INTRODUCCIÓ A L'ELECTROMAGNETISME

1.0. Càlcul vectorial

- Definicions i sistemes de coordenades
- Camps escalars, operador gradient
- Camps vectorials, operadors divergència i rotacional
- Integrals i teoremes fonamentals

http://www.wadsworthmedia.com/math/0534409865_stewart3c3/chapter13.html



Tema 1: INTRODUCCIÓ A L'ELECTROMAGNETISME

1.0. Càlcul vectorial: BIBLIOGRAFIA

- Griffiths: Tema 1
- Reitz Milford: Tema 1
- Univ. Sevilla Tema 1

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: definicions

- Escalars són quantitats que només tenen un valor.
  • longitud, massa, temperatura etc.

- Vectors són quantitats que tenen mòdul, direcció i sentit (treballarem en l'espai euclidià R3: 3 components).
  • força, velocitat, acceleració etc.

- Camp escalar f: és una funció $f(x, y, z)$ que a cada punt de l'espai, li assigna una magnitud escalar.

- Camp vectorial $\boldsymbol{A}$: es una funció $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ que a cada punt de l'espai, li assigna una magnitud vectorial.

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: operador nabla

CÀLCUL DIFERENCIAL EN TRES VARIABLES

- Treballarem amb l'operador diferencial ***nabla***
- És representat pel símbol ∇ (depèn sistema coordenades)
- En cartesianes: $$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_X + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$
- ∇ té caràcter vectorial, però no és estrictament un vector: **ACTUA** sobre una funció (escalar o vectorial).
- Possibles "actuacions":
  - sobre un escalar: *gradient*
  - sobre un vector (prod. escalar): *divergència*
  - sobre un vector (prod. vectorial): *rotor*

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: operador nabla

REGLES DE MULTIPLICACIÓ (vore FORMULARI en pdf)

- Hi ha dues formes d'obtenir un escalar: $\Psi\Phi$ ó $\vec{a}\cdot\vec{b}$
- Hi ha dues formes d'obtenir un vector: $\Psi\,\vec{a}$ ó $\vec{a}\times\vec{b}$
- Hi ha sis regles de producte:

Gradient

$$\vec{\nabla}\cdot(\Psi\Phi)=\Psi\,\vec{\nabla}\Phi+(\vec{\nabla}\Psi)\,\Phi$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}+\vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b})+\vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$$

Divergència

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\,\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\psi+\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$

Rotacional

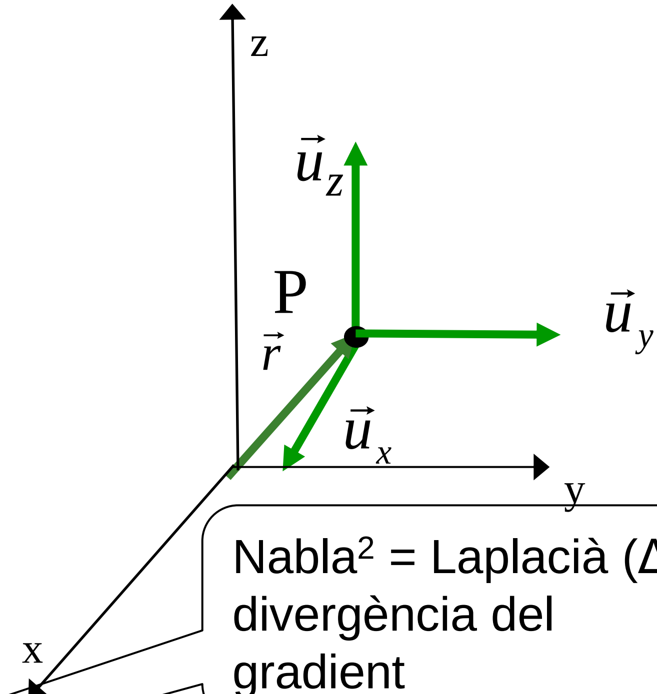
$$\vec{\nabla}\times(\psi\,\vec{a})=\vec{\nabla}\psi\times\vec{a}+\psi\vec{\nabla}\times\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: SISTEMES DE COORDENADES

COORDENADES RECTANGULARS o CARTESIANES



GRADIENT $$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{u}_z$$

DIVERGÈNCIA $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTACIONAL $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

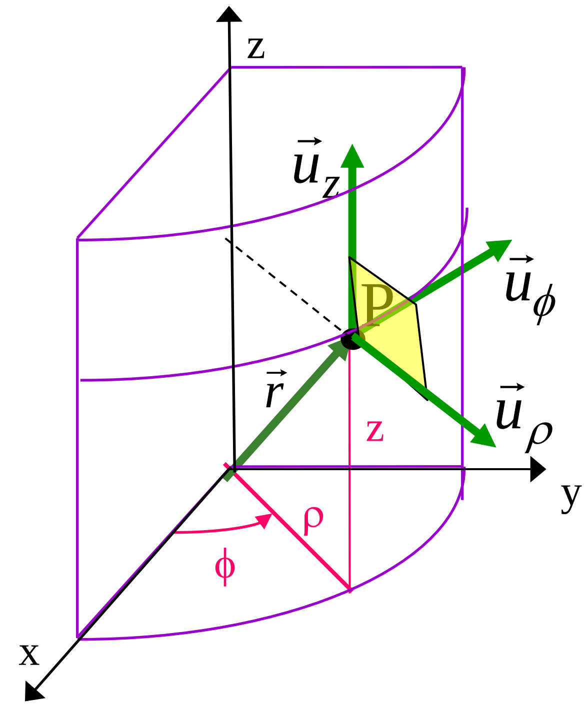
LAPLACIÀ $$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Nabla^2 = Laplacià (Δ) divergència del gradient

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: SISTEMES DE COORDENADES

COORDENADES CILÍNDRIQUES



GRADIENT

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{u}_z$$

DIVERGÈNCIA

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTACIONAL

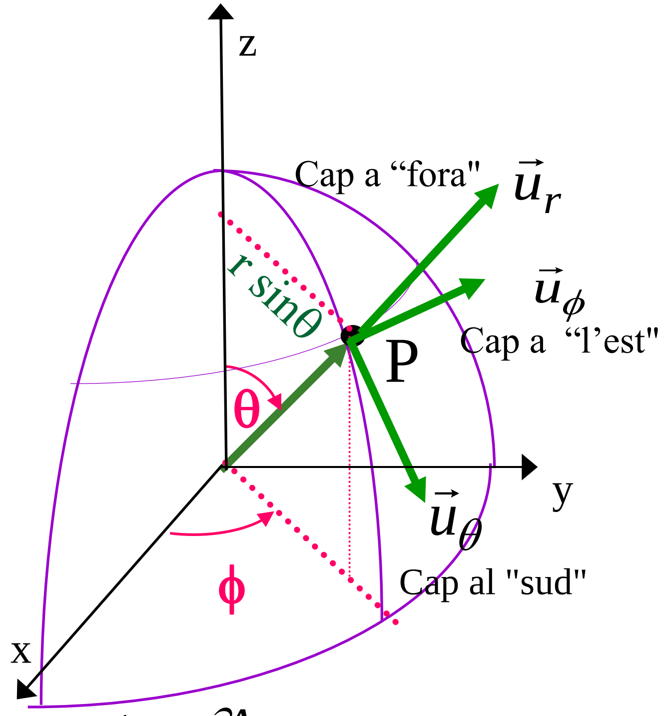
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{u}_z$$

LAPLACIÀ

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ

1.0 Càlcul vectorial: SISTEMES DE C(



COORDENADES ESFÈRIQUES

GRADIENT

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{u}_\phi$$

DIVERGÈNCIA

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

ROTACIONAL

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{u}_r +$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\phi$$

LAPLACIÀ

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

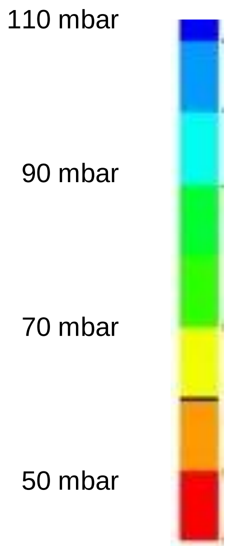
1.0 Càlcul vectorial: camps escalars

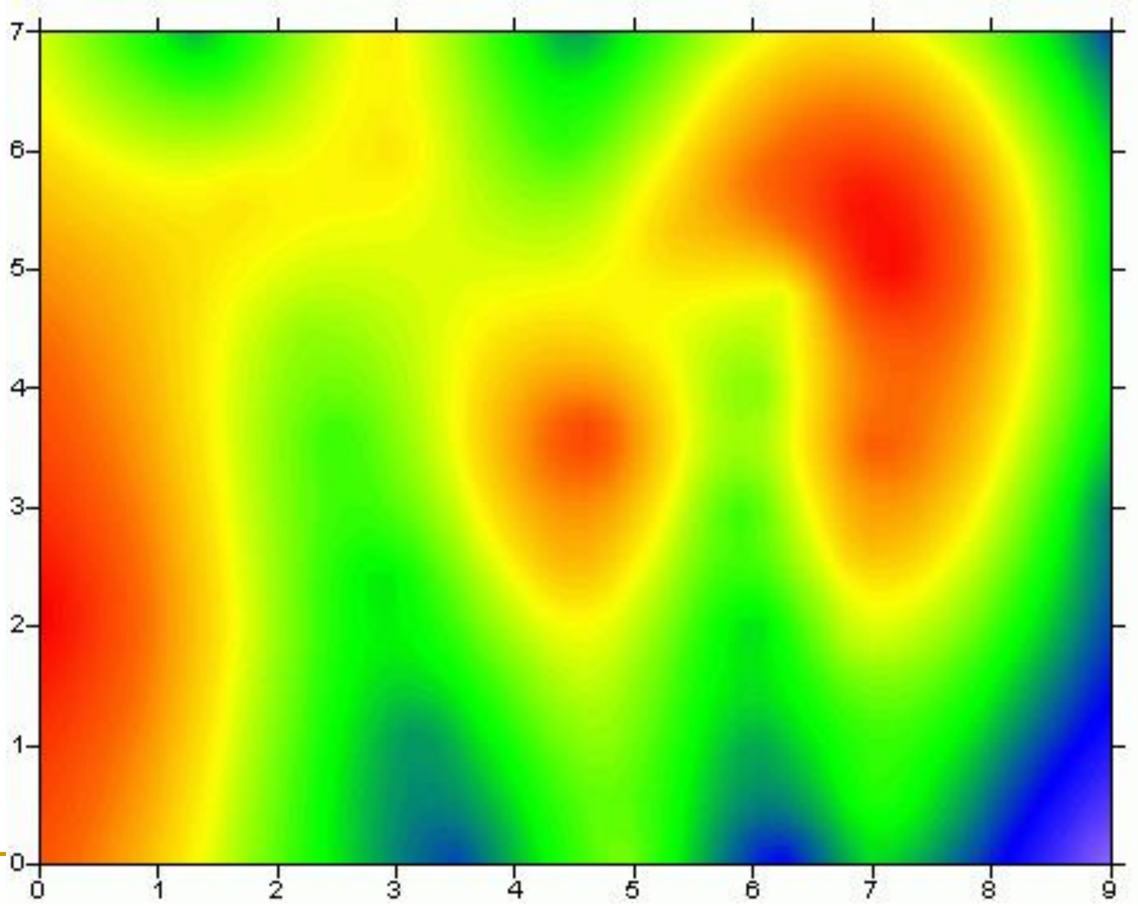
- Camp escalar f : és una funció $f(x, y, z)$ que a cada punt de l'espai, li assigna una magnitud escalar.
- Perquè tinga significat físic ha de ser monovaluada.
- Exemples: camp de pressió d'un recinte amb un gas
- REPRESENTACIÓ: codi de colors o superfícies equiescalars (lloc geomètric dels punts que compleixen $f(x, y, z) = \text{const.}$).

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars

- Exemple: pressió d'un gas, <u>codi de colors</u>

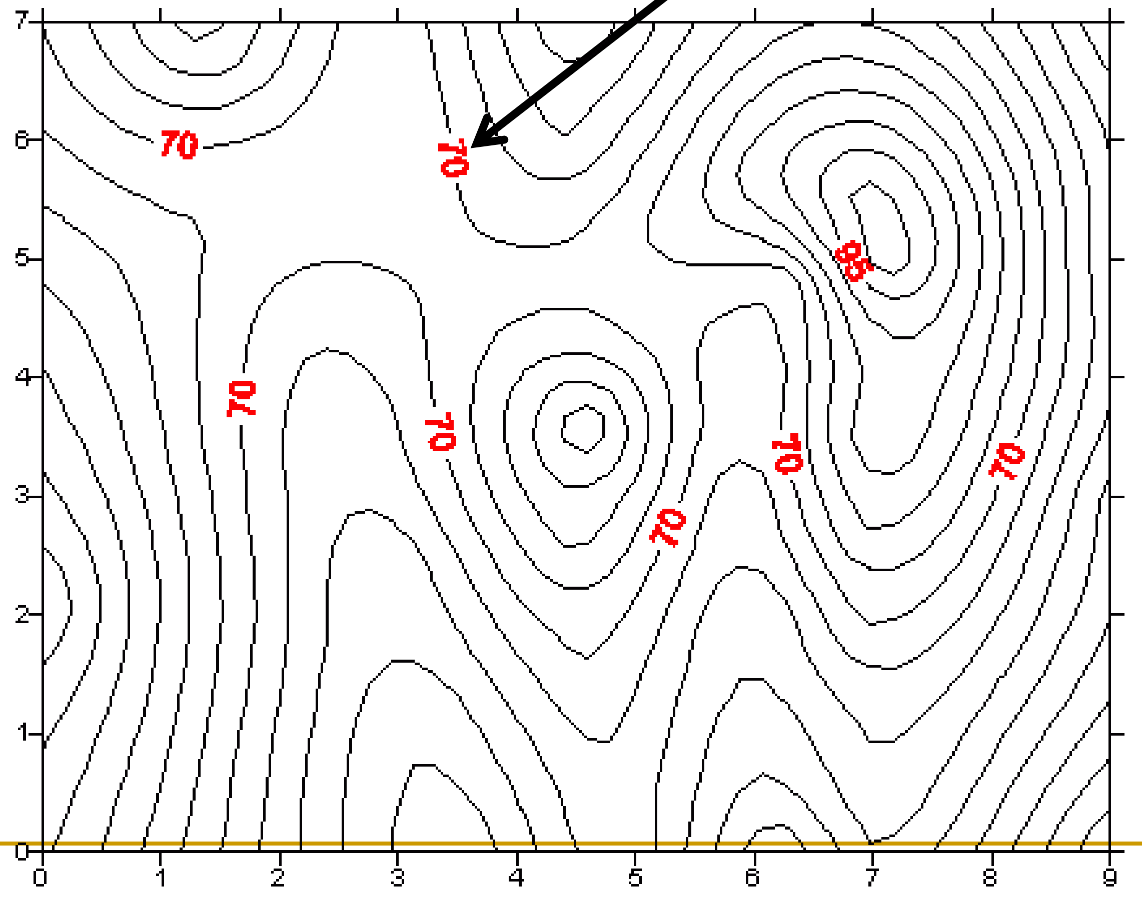




TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars

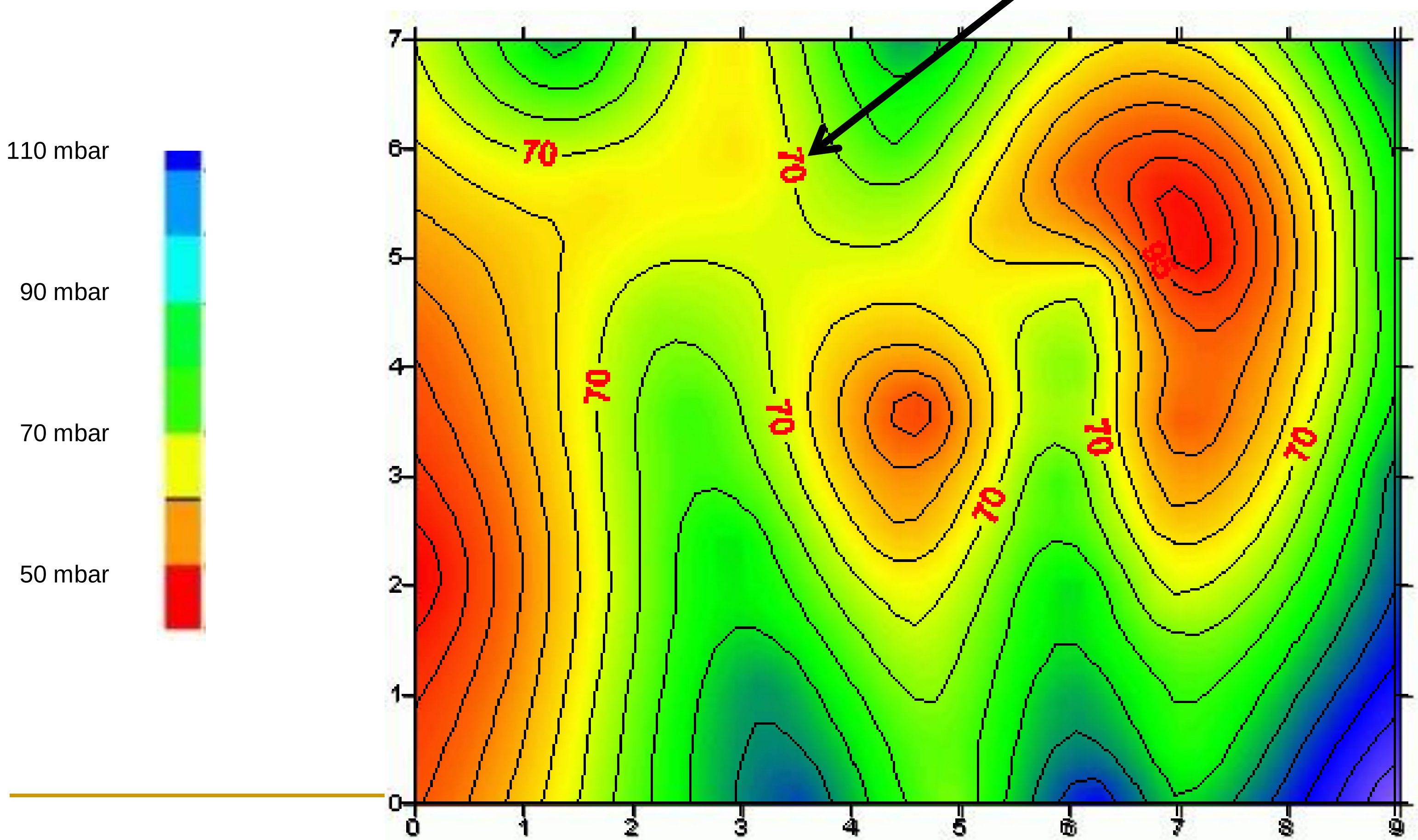
- Exemple: pressió d'un gas, superfícies equiescalars



TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars

- Exemple: pressió d'un gas superfícies equiescalars



TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars, operador gradient

- Operador gradient: (cartesianes)

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

- S'aplica sobre una funció escalar. El resultat que s'obté és una funció vectorial que, avaluada en un punt, proporciona un vector.

Significat físic del vector que s'obté:

- Direcció: perpendicular a les superfícies equiescalars, indicant la direcció de màxima variació, en aqueix punt.
- Sentit: cap a valors **creixents** de la funció escalar, en aqueix punt.
- Mòdul: valor de la derivada de la funció escalar (pendent) en la direcció de màxima variació en aqueix punt.

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars, operador gradient

Exemple: Donada la funció potencial $V = x^2y + xy^2 + xz^2$, (*a*) cal trobar el gradient de V, (*b*) i avaluar-lo en (1, -1, 3).

Solució:

(*a*)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= (2xy + y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$$

(*b*)

$$\nabla V\big|_{(1,-1,3)} = (-2+1+9)\mathbf{i} + (1-2)\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

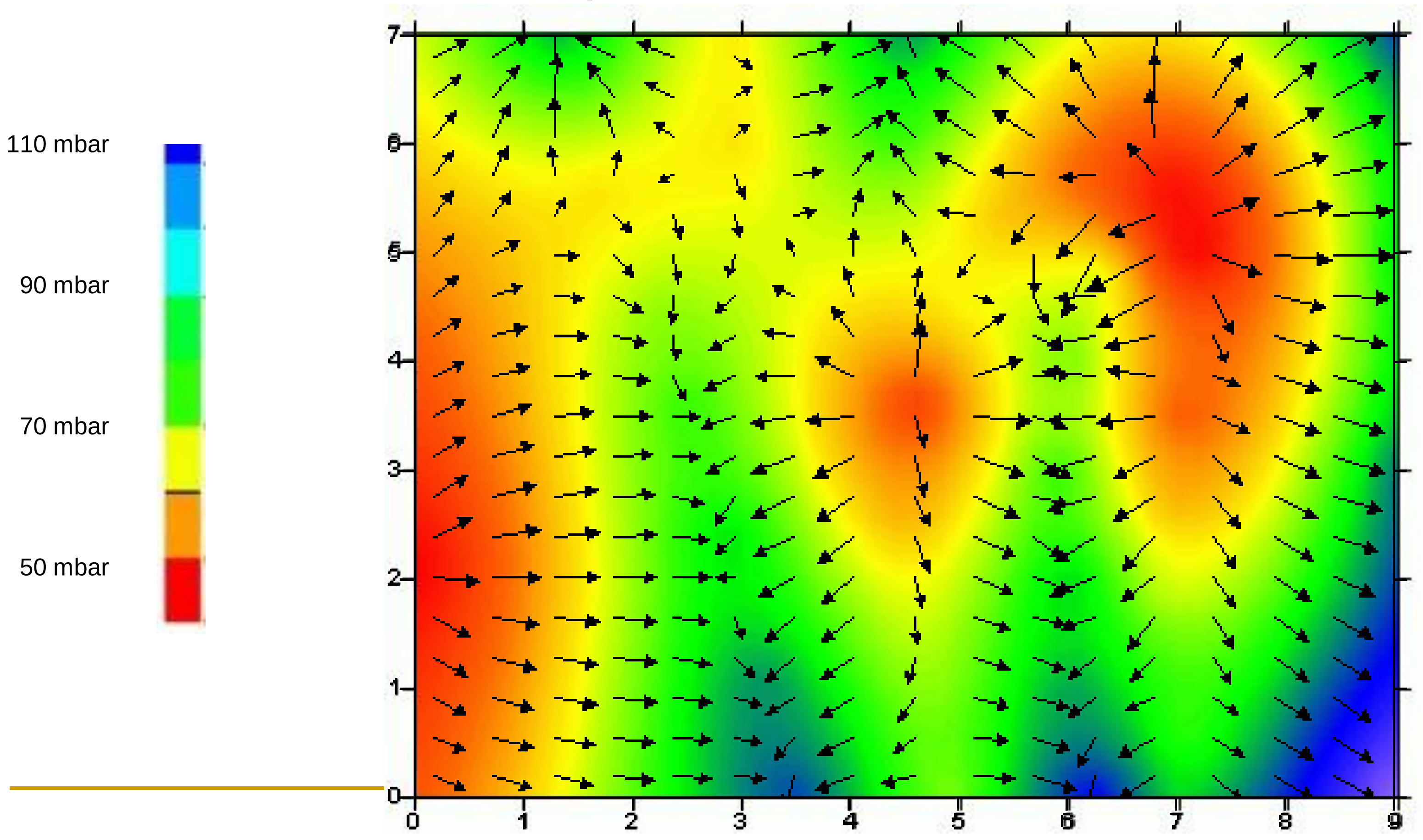
$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 6^2}} = \frac{1}{\sqrt{101}}(8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Direcció de màxima variació

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars, operador gradient

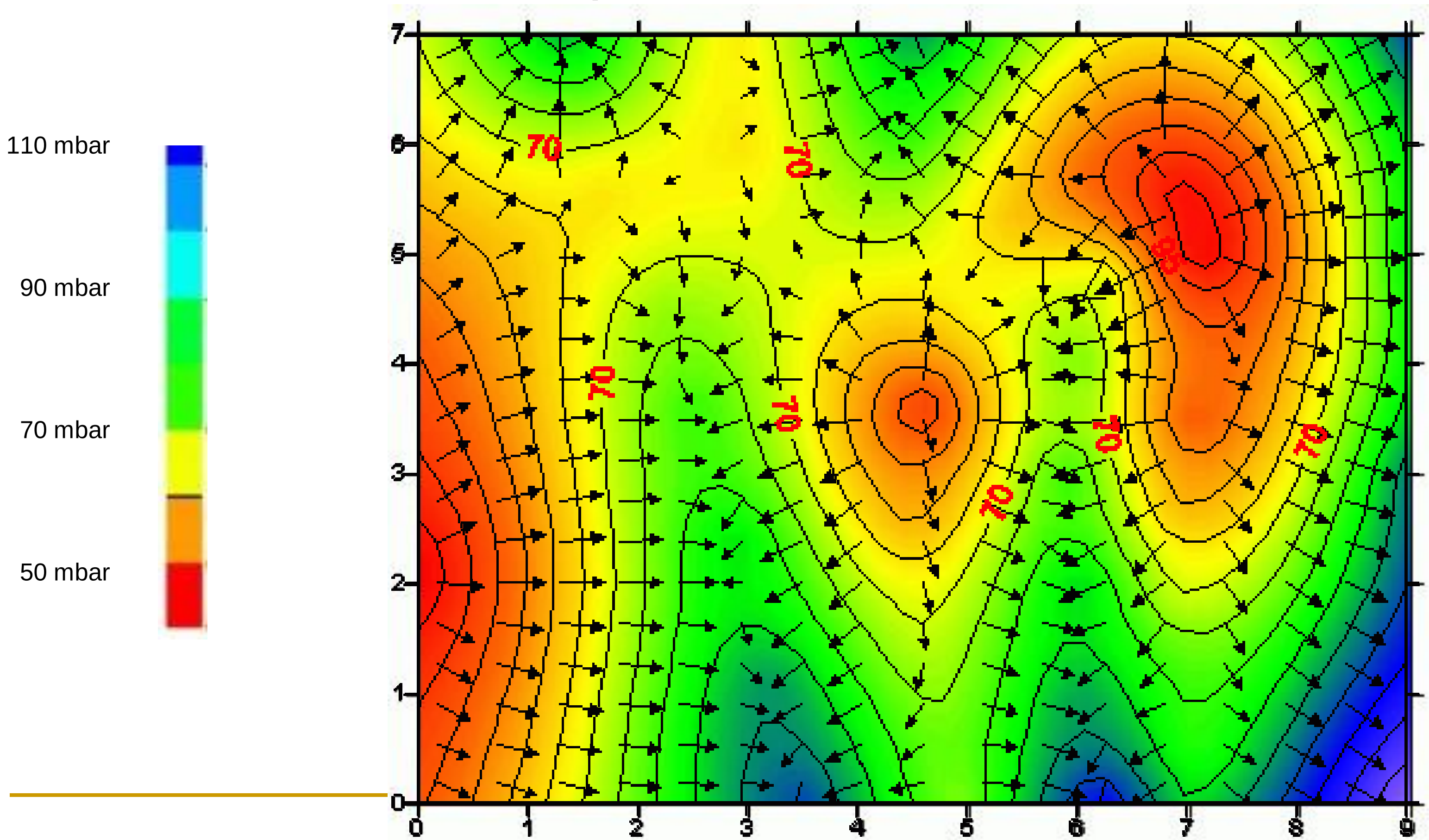
- Exemple: gradient en cada punt = direcció de màxima variació en cada punt



TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars, operador gradient

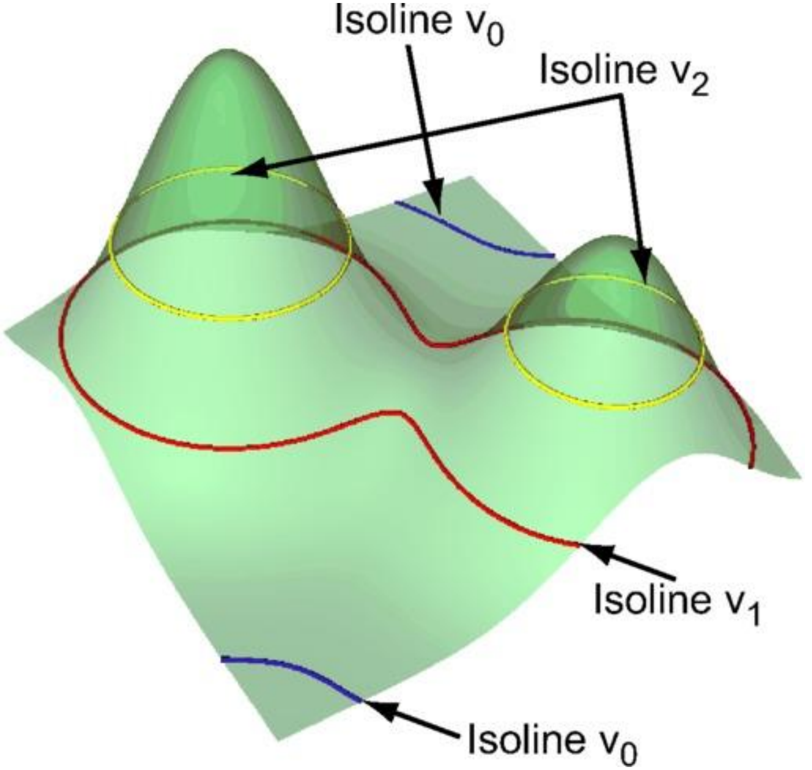
- <u>Exemple</u>: gradient en cada punt = direcció de màxima variació en cada punt = PERPENDICULAR A SUP.

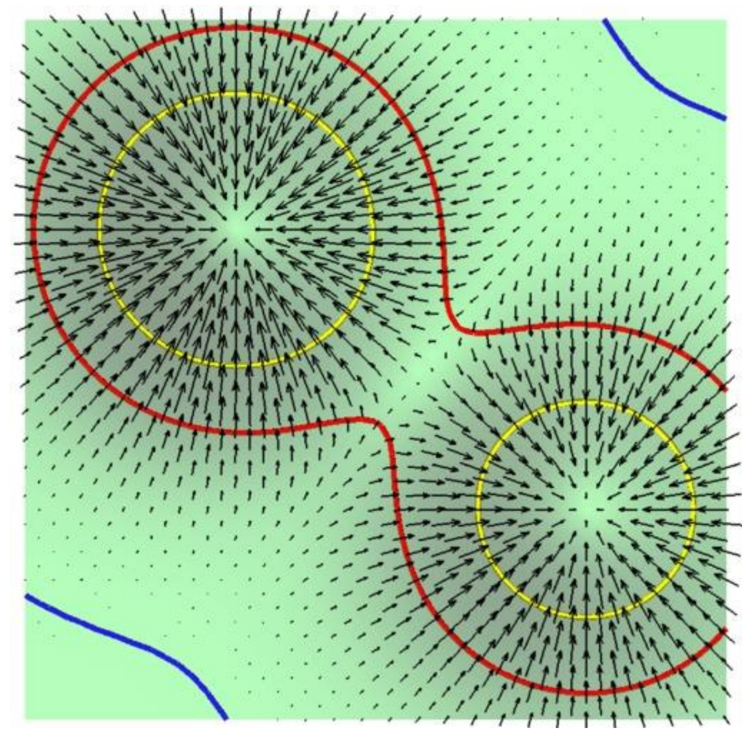


TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps escalars, operador gradient

- <u>Exemple</u>: gradient en cada punt = direcció de màxima variació en cada punt = PERPENDICULAR A SUP.





http://visual.atzibala.com/vis09/wiki/CamposEscalaresContornos