MATEMÀTIQUES II

Llicenciatura en Ciències Químiques

GUIA DIDÀCTICA

Rafael Pla López
Departament de Matemàtica Aplicada
Universitat de València
curs 2008-2009

Objectius:

Específics:

1. Determinar l'error del resultat d'un càlcul a partir de l'error de les dades de les quals partim (PROPAGACIÓ D'ERRORS).

2. Inferir informació sobre poblacions a partir d'una porció de les mateixes (INTRODUCCIÓ A L'ESTADÍSTICA).
    1. Aprendre a obtenir mides de centralització i dispersió en una distribució estadística.
    2. Estudiar casos típics de distribucions estadístiques de probabilitats.
    3. Fer estimacions sobre una població a partir d'una mostra.
    4. Obtenir una recta que tinga la menor desviació possible d'un conjunt de punts.
    5. Estimar si un conjunt de mostres pertanyen a la mateixa població.
3. Obtenir aproximacions discretes a la solució de diferents problemes (INTRODUCCIÓ AL CÀLCUL NUMÈRIC).
    1. Interpolar el valor d'una funció polinòmica desconeguda que passe per un conjunt de punts.
    2. Aproximar la integració d'una funció, acotant l'error d'aproximació.
    3. Obtenir el valor futur d'una variable coneguent el seu valor inicial y la dependència de la seua derivada respecte del temps i la mateixa variable, y'=f(t,y).
4. Aprendre a utilitzar un llenguatge de programació o un paquet informàtic, a elecció del professorat de cada grup de pràctiques.

Genèrics:

1. Aprendre a treballar en equip.
2. Aprendre a exposar públicament un treball.
3. Adquirir respecte pels companys que exposen un treball, atenent-los i ajudant-los en cas necessari.
4. Aprendre a realitzar raonaments deductius per a demostrar un enunciat a partir de determinades premisses.
5. Adquirir la capacitat de qüestionar la fiabilitat dels resultats obtinguts per mètodes numèrics i estadístics.

Metodologia:

- Treball en classe en grups menuts debatint textos, demostrant enunciats i resolent problemes, seguit de la seua exposició pública.
- Treball en equip fora de classe, elaborant treballs per a la seua presentació al professor.
- Treball pràctic en aula d'informàtica.

Avaluació:

- La qualificació final serà la mitjana de la nota de teoria i la nota de pràctiques, sempre que ambdues siguen igual o superior a 4 (sobre un màxim de 10).
- Per a la nota de teoria puntuarà fins a 8 punts l'avaluació d'un examen final individual escrit, i fins a 2 punts la realització de treballs en equip, que solament podran considerar-se en cas d'assistència regular a classe (en cas contrari, haurien de respondre's qüestions addicionals en l'examen final puntuables fins als 2 punts restants). Es podrà consultar aquesta Guia Didàctica i un formulari escrit a ma personalment en un màxim de 3 fulls sense problemes resolts (no s'admeten fotocòpies). A més, es prevaldrà la participació activa en classe sumant una dècima per cada exposició pública d'un treball realitzat en classe.
- La nota de pràctiques es determinarà per l'avaluació de les memòries presentades de les pràctiques realitzades i de l'avaluació d'un examen pràctic individual en ordinador, el qual puntuarà entre el 40 i el 60% de la nota de pràctiques (percentatge a determinar pel professorat de cada grup de pràctiques).

Bibliografia:

Estadística:

- Canavos, G.C. (1987), **Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos**, McGrawHill
- Christensen, M.B. (1983), **Estadística paso a paso**, Trilla, Mexico
- Cuadras, C.M. (1986), **Problemas de Probabilidad y Estadística**, Anaya, Madrid
- Dwnie, N.M., Heath, R.W. (1971), **Métodos de Estadística Aplicada**, Ed.del Castillo, Madrid
- Dowdy, S., Wearden, S. (1991), **Statistics for Research**, Wiley & sons
- Fz.de Troconiz, A. (1987), **Probabilidades, Estadística, Muestreo**, Ed.Tébar Flores, Madrid
- Gmurman, V.E. (1974), **Teoría y Problemas. Estadística Matemática**, Mir, Moscu
- Gutiérrez, S. (1976), **Estadística Aplicada**, ed.facsímil, València
- Gutiérrez Cabria, S., **Probabilidades, Bioestadística**, Ed.Tebar Flores, Madrid
- Haber, A., Runyon, R.P. (1973), **Estadística General**, Fondo Educativo Iberoamericano
- Labrousse, C. (1968), **Estadística**, Colección Univ.de Matemática Pura, Madrid
- Martínez Salas, HJ. (1989), **Métodos Matemáticos**, Ed.el autor, Valladolid
- Mendenhall, W., Scheaffer, R.L., Wackely, D.D. (1986), **Estadística Matemática con Aplicaciones**, Grupo Editorial Iberoamérica
- Milton, T. (1987), **Estadística para Biología y Ciencias de la Salud**, InteramericanaMcGrawHill
- Ortle, B. (1970), **Estadística Aplicada**, LinusaWiley, Mexico
- Quesada, V., Isidoro, A., Löpez, L.A. (1984), **Curso y Ejercicios de Estadística**, Alhambra Universidad
- Sachs, I. (1978), **Estadística Aplicada**, Labor, Barcelona
- Spiegel, M.R. (1979), **Estadística**, Schaum/McGrawHill, México
- Spiegel, M.R. (1976), **Probabilidad y estadística**, Schaum/McGrawHill, México
- Williams, B. (1993), **Biostatistic**, Chapman & Hall

Càlculo Numèric:

- Aubanell, A., Benseny, A., Delshams, A. (1991), **Eines bàsiques de Càlcul Numèric**, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra
- Aubanell, A., Benseny, A., Delshams, A. (1993), **Útiles básicos de Cálculo Numérico**, Editorial Labor, Barcelona
- Chapra, S.C., Canale, R.P. (1985), **Métodos numéricos para ingenieros (con aplicaciones en computadoras personales)**, McGrawHill, Mexico
- Conte, S.D., Boor, C.de (1974), **Análisis numérico elemental**, McGrawHill, México
- Cordero, A., Hueso, J.L, Martínez, E., Torregrosa, J.M. (2006), **Problemas Resueltos de Métodos Numéricos**, Thomson, España

- Denidovich, B.P., Maron, I.A. (1988), **Cálculo Numérico Fundamental**, Paraninfo, Madrid
- Douglas, J., Burden, R. (2004), **Métodos Numéricos**, Thomson, España
- Martínez Salas, J. (1989), **Métodos Matemáticos**, Ed.el autor, Valladolid
- Ralston, A. (1985), **Introducción al Análisis Numérico**, Linusa, Mexico
- Scheid, F. (1990), **Análisis Numérico**, McGrawHill, Mexico
- Scheid, F. Constanzo, R.E.di (1991), **Métodos Numéricos**, McGrawHill

0. Determinar l'error del resultat d'un càlcul a partir de l'error de les dades de les quals partim (PROPAGACIÓ D'ERRORS):

Activitat 0.1. Les dades experimentals amb les que treballem venen sempre donades amb un cert error. Si a partir d'elles realitzem càlculs, aquests errors es propaguen als resultats. Així, si $y=f(x)$, tindrem que $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Tanmateix, si l'ordre de magnitut de l'error és prou inferior a l'ordre de magnitud de les dades, podem estimar l'error per la diferencial, prenent així $\Delta y \approx f'(x)\cdot\Delta x$.

Problema 0.1: si $y=x^2$, estimar l'error de y en els següent casos:

a) $x=2\pm1$.

b) $x=2'0\pm0'1$

c) $x=2'00\pm0'01$

En quins casos la diferencial donarà una bona estimació de l'error (expressant aquest amb una única xifra significativa, o 2 si la primera és 1)?.

Activitat 0.2.

Exercici 0.1: tenint en compte que si $z=f(x,y)$ aleshores $dz = f_x'\cdot\Delta x + f_y'\cdot\Delta y$, obtenir l'expressió aproximada de l'error de z si $z=x+y$, $z=x\cdot y$, $z=x/y$, $z=x^2$, $z=\sqrt{x}$.

Activitat 0.3.

Problema 0.2: suposem que una reacció ve regida per la llei d'acció de mases $v=k\cdot[A]\cdot[B]^2$, amb $k=0'254\pm0'001$. Si es mesuren les concentracions en equilibri obtenint-se $[A]=7'23\pm0'04$ mols/l, $[B]=9'58\pm0'12$ mols/l, estimar l'error de la velocitat de reacció en equilibri.

1. Inferir informació sobre poblacions a partir d'una porció de les mateixes (INTRODUCCIÓ A L'ESTADÍSTICA):

Activitat 1.1: Debatir en grups menuts el següent text, escollint prèviament un portaveu de cada grup per exposar posteriorment les conclusions i en el seu cas les dubtes suscitades:

En nombrosos problemes pràctics estem interessats en propietats blobals de ***poblacions****, més que en les propietats particulars de cadascun dels individus que les composen. Aquestes propietats globals de les poblacions (i entenim per població qualsevol conjunt, els elements del qual són tractats de forma indiferenciada) són l'****objecte*** *de l'Estadística: des d'un punt de vista estadístic, allò que interessa no és quins individus tenen una propietat determinada, sinó quants la tenen.*

Ara bé, normalment no tenim accés a les poblacions en el seu conjunt, sinó solament a porcions de les mateixes (a les quals anomenem ***mostres****), i ens interessa poder inferir propietats globals a partir de l'estudi d'aquestes porcions. Aquesta inferència és l'****objectiu*** *central de l'Estadística.*

La inferència estadística és fonamental per a la investigació científica: habitualment, es construeixen teories globals sobre poblacions, les quals es contrasten amb estudis experimentals sobre mostres de les mateixes. Però és important recalcar que la inferència estadística solament permet arribar a estimacions, i no a afirmacions concloents.

*Per tot això, podriem dir que l'Estadística, per la seua pròpia natura, és una ciència "****democràtica****" pel seu objecte (poblacions globals, que poden ser tant d'objectes inanimats com de persones humanes) i "****antidogmàtica****" pel seu mètode, el qual exclou certeses definitives.*

1.1. Aprendre a obtenir mides de centralització i dispersió en una distribució estadística:

Objectius:

1. Comprendre la noció de distribució estadística i la seua no dependència de les propietats específics d'individus específics.
2. Aprendre a comparar diferents distribucions estadístiques pel valor al voltant del qual s'agrupen els seus valors.
3. Aprendre a comparar diferents distribucions estadístiques per la dispersió dels seus valors.
4. Entendre en quina mesura varien les mesures de centralització i dispersió d'una distribució estadística al sumar, restar, multiplicar o dividir els seus valors per una quantitat fixa.
5. Aprendre a calcular les mesures de centralització i dispersió de manera que se simplifiquen els càlculs i s'eviten els errors de cancelació.
6. Aprendre a normalitzar les distribucions estadístiques per tal de fer-les comparables més enllà de les seues mesures de centralització i dispersió.

Activitat 1.2. Una *variable aleatòria* (X) sobre un conjunt-població U és qualsevol variable que pot tenir distints valors (x) per als distints elements-individus de la població. La *distribución estadística* d'aquests valores no té en compte els individus concrets per als que aquesta variable té cada valor, sino quants la tenen, al que anomenem *frequència* f(x) d'aquest valor en la població. Anomenarem *paràmetre poblacional* a qualsevol quantitat que solament depenga de les frequències. Dues variables aleatòries seran estadísticament *equivalents* quan tinguen la mateixa distribució de freqüències.
Exercici 1.1: prendre una variable aleatòria sobre l'alumnat assistent a la classe, per exemple el fet de portar o no portar ulleres, i realitzar un experiment senzil per tal de comprovar que el número dels que porten ulleres és un paràmetre poblacional.

Activitat 1.3.
Exercici 1.2: representar gràficament en diagrames de barres la distribució estadística de les freqüències del número de calcer i de l'edat en l'alumnat assistent a classe.

Activitat 1.4. Com a mesures de *centralitat* (valor al voltant del qual s'agrupen els valors de la variable aleatòria) podem prendre:
La *moda*: aquell valor que tinga la màxima freqüència en la població.
La *mediana*: suposant que el conjunt de valors de la variable aleatòria esté ordenat, serà un valor que tinga tants individus amb un valor inferior com amb un valor superior.
La *mitjana* $\mu(X)$: suposant que els valors de la variable aleatòria siguen números reals, i que la *grandària* (número d'individus n(U)) de la població siga finit, ve donada per la suma dels valors X_i per a tots els individus i de la població dividida per la seua grandària, $\mu(X) = \sum_i X_i / n(U)$.
Teorema 1.1: $\sum_x f(x) = n(U)$, $\mu(X) = \sum_x x \cdot f(x) / n(U)$.
Problema 1.1: calcular les diferents mesures de centralització per a les distribucions estadístiques de l'Activitat 1.3. Com podem utilitzar les freqüències per simplificar els càlculs?

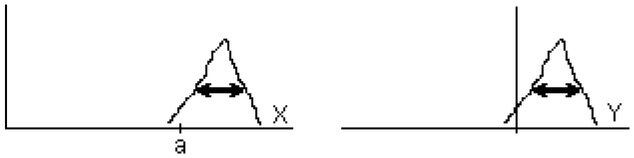
Activitat 1.5. Per justificar que el càlcul de la mitjana és una operació lineal, demostrar els següent teoremes:
Teorema 1.2: si tenim dues variables aleatòries X, Y amb valors numèrics reals sobre la mateixa població U, $\mu(X+Y)=\mu(X)+\mu(Y)$.
Teorema 1.3: si tenim una variable aleatòria sumable X y un número real constant c, $\mu(c\cdot X)=c\cdot\mu(X)$.

Activitat 1.6. A partir de la linealitat del càlcul de la mitjana expressada als dos teoremes anteriors, i tenint en compte que la mitjana d'una constant és igual a la mateixa constant, demostrar
Teorema 1.4: si tenim una variable aleatòria X amb valors numèrics reals i un número real $a\in R$, aleshores $\mu(X)=a+\mu(X-a)$.
Teorema 1.5: si tenim una variable aleatòria X amb valors numèrics reals i dos números reals $a,c\in R$, i prenem $Y=(X-a)/c$, aleshores $\mu(X)=a+c\cdot\mu(Y)$.
Els teoremes anteriors es poden utilitzar per a simplificar el càlcul de la mitjana. Aplicar-ho per a la resolució del
Problema 1.2: midar la longitud de la pròpia mà amb una precisió de 0'5 cm i calcular la mitjana del conjunt de l'alumnat assistent a classe.

Activitat 1.7. Com a mesures de *dispersió* (per expressar l'allunyament entre sí dels valors d'una variable aleatòria) podem prendre:
Els *quartils* primer i tercer: suposant que el conjunt de valors de la variable aleatòria esté ordenat, els quartils seran tres valors que dividisquen al conjunto de valors en quatre subconjunts de valors que corresponguen al mateix número d'individus; observem que el segon quartil coincidirà amb la mediana. Si tenim definida una distància en el conjunt de valors, podem mesurar la dispersió com la distància entre el primer i el tercer quartil.
La *amplitut*: suposant que els valors estiguen ordenats i tinguem definida una distància entre ells, serà la distància entre els valors mínim i màximo en la població.
La *desviació mitjana*: suposant que els valores de la variable aleatòria siguen números reals i que la grandària de la població siga finita, serà la mitjana del valor absolut de las diferèncias entre el seu valor per a cada individu i la mitjana d'aquests valors, $\mu(|X-\mu(X)|)$
La *variança* $\sigma^2(X)$: suposant que els valors de la variable aleatòria siguen números reals i que la grandària de la població siga finita, serà la mitjana del quadrat de les diferències entre el seu valor per a cada individu i la mitjana d'aquests valors, $\sigma^2(X)=\mu((X-\mu(X))^2)$.
La *desviació típica* $\sigma(X)$: es l'arrel quadrada de la variança.
Demostrar el
Teorema 1.6: $\sigma^2(X)=\mu(X^2)-\mu(X)^2$ (la variança és igual a la mitjana dels quadrats menys el quadrat de la mitjana).
Aquest teorema proporciona una forma més còmoda de calcular la variança.
Problema 1.3: calcular les diferents mesures de dispersió per a les distribucions estadístiques de l'Activitat 1.3.
Problema 1.4: calcular la variança d'aquest conjunt de valors: (1000000'1, 1000000'2, 1000000'2, 1000000'3).

Activitat 1.8. Com haurem vist a l'intentar resoldre el Problema 1.4, si la mitjana d'una distribució estadística és molt més gran que la seua amplitut, aleshores la mitjana del quadrat i el quadrat de la mitjana tindran moltes xifres significatives coincidents, que poden fins i tot superar la precisió dels nostres instruments de càlculs; en aquest cas, obtindriem erròniament zero com la seua diferència, produint-se així un "error de cancelació". Per tal de poder evitar-ho utilitzant les propietats de la variança, demostrar el

Teorema 1.7: si tenim una variable aleatòria X amb valors numèrics reals i un número real $a \in R$, i prenem $Y=X-a$, aleshores $\sigma^2(Y)=\sigma^2(X)$, és a dir, la variança és invariant davant traslacions, com es pot entendre fàcilment observant la figura adjunta.



Per tant, podrem evitar l'error de cancelació restant a tots els valors una quantidad fixa pròxima al seu valor mínim. Aplicar-ho a la resolució del Problema 1.4.

Activitat 1.9. Demostrar el

Teorema 1.8: si tenim una variable aleatòria X amb valors numèrics reals i dos números reals $a,c \in R^+$, i prenem $Y=(X-a)/c$, aleshores $\sigma(X)=c\cdot\sigma(Y)$.

Aplicar-ho per simplificar la resolució del

Problema 1.5: calcular la variança de la distribució estadística del Problema 1.2.

Activitat 1.10. Per comparar la forma de distribucions estadístiques amd diferents mitjanes i variances podem transformar-les en altres distribucions estadístiques amb mitjanes i variances coincidents. Anomenarem així *normalització* de una variable aleatòria X al resultat de restar-li la seua mitjana i dividir la diferència per la seua desviació típica, $N(X)=(X-\mu(X))/\sigma(X)$. Demostrar el

Teorema 1.9: $\mu(N(X))=0$ i $\sigma(N(X))=1$.

Exercici 1.3: Representar gràficament en la mateixa figura la normalització de les distribucions estadístiques de l'Activitat 1.3.

1.2. Estudiar casos típics de distribucions estadístiques de probabilitats:

Objectius:

1. Treballar les distribucions estadístiques a partir de les freqüències relatives (probabilitats).
2. Averiguar la distribució probabilística del número d'ocurrències d'un succés entre un número d'ocasions independents. (distribució binomial).
3. Aproximar la distribució probabilística del número d'ocurrències d'un succés rar coneguent el número mitjà d'ocurrències entre un número gran d'ocasions independents (distribució de Poisson).
4. Introduir la distribució de densitat probabilística d'una variable aleatòria que varia de forma contínua.
5. Estudiar la distribució de densitat probabilística de la mitjana d'un gran número de variables aleatòries equivalents independents (distribución normal).

Activitat 1.11. Per a comparar distribucions estadístiques sobre diferents poblacions hauriem d'utilitzar les corresponents freqüències relatives o *probabilitats*, definides per $p(x)=f(x)/n(U)$.
Demostrar els següents teoremes:
<u>Teorema 1.10:</u> $\sum_x p(x) = 1$ (anomenarem *distribució probabilística* a qualsevol aplicació $p:V \rightarrow R^+ + \{0\}$ que acomplisca aquesta propietat, essent V un conjunt numerable de valors).
<u>Teorema 1.11:</u> $\mu(X) = \sum_x x \cdot p(x)$ (utilitzarem aquesta expressió per definir la mitjana de qualsevol distribució probabilísitica amb independència de la grandària finita o infinita de la població).
<u>Exercici 1.4:</u> representar gràficament en diagrames de pastís les distribucions probabilístiques de les variables aleatòries de l'activitat 1.3.

Activitat 1.12. Si tenim un conjunt A de valors d'una variable aleatòria, la seua probabilitat vindrà definida per
$p(A) = \sum_{x \in A} p(x)$. Demostrar el
<u>Teorema 1.12:</u> Si A i B són dos conjunts disjunts de valors d'una variable aleatòria, $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Activitat 1.13. Direm que dues variables X, Y són independents si per a qualsevol parell (x, y) de valors respectius de les mateixes s'acompleix $p(x,y)=p(x) \cdot p(y)$.
<u>Problema 1.6:</u> estudiar si les variables aleatòries de l'Activitat 1.3 són independents.

Activitat 1.14. Tenint en compte el
<u>Teorema -1.1:</u> el número de maneres en que podem escollir m elements entre n és

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ (*combinacions* de n sobre m)

demostrar el
<u>Teorema 1.13:</u> Si que tenim n variables-ocasions independents amb un determinat valor-succés amb la mateixa probabilitat p, la probabilitat de no ocurrència de cada succés serà $q=1-p$ i.la probabilitat de que el número d'ocurrències del succés siga exactament m serà

$P^B(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$ (*distribució binomial* B(p,n))

Per a demostrar-ho, estudiar primer la probabilitat d'una determinada sèrie ordenada de m ocurrències i n-m no ocurrències, i després el número de maneres d'ordenar m ocurrències i n-m no ocurrències, tenint en compte que són indiferents les permutacions entre sí de les ocurrències i les no ocurrències.

Problema 1.7: calcular la probabilitat d'obtenir exactament 3 asos en 5 llançaments d'un dau.

Activitat 1.15. Tenint en compte el

Teorema -1.2: $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}$ (*binomi de Newton*)

demostrar el

Teorema 1.14: $\sum_{m=0}^{n} P^B(m) = 1$

Activitat 1.16. Tenint en compte el

Teorema -1.3: $0!=1$, $m!=m\cdot(m-1)!$

demostrar els

Teorema 1.15: per a tot m=1...n, $\binom{n}{m}\cdot m = n\cdot\binom{n-1}{m-1}$

Teorema 1.16: $\mu(B(p,n)) = np$.

Activitat 1.17. Demostrar els

Teorema 1.17: per a tot m=2...n, $m\cdot\binom{n-1}{m-1} =)n-1)\cdot\binom{n-2}{m-2} + \binom{n-1}{m-1}$

Teorema 1.18: $\sigma(B(p,n))^2 = npq = np(1-p)$

Activitat 1.18.

Problema 1.8: obtenir la mitjana i la desviació típica del número d'asos al llançar 30 vegades un dau.

Activitat 1.19. Si p és molt xicotet, per a obtenir una mitjana μ apreciable d'ocurrències d'un succés necessitarem un número n molt gran d'ocasions. Però els factorials n!, i per tant la distribució binomial, són difícils de calcular si n és gran. En aquest cas, haurem d'utilitzar una aproximació. A tal efecte, i tenint en compte que $e = \lim_{u\to\infty} (1+1/u)$, i per tant

Teorema -1.4: $\lim_{n\to\infty} (1-\mu/n) = e^{-\mu}$

demostrar el

Teorema 1.19: si $p=\mu/n$, $P^\Pi(m) = \lim_{n\to\infty} P^B(m) = e^{-\mu}\cdot\mu^m/m!$ (*distribució de Poisson* $\Pi(\mu)$).

La distribució de Poisson és una bona aproximació a la binomial si $n>50$, $p<0'1$ i $\mu=np<5$.

Activitat 1.20. Tenint en compte el

Teorema -1.5: $e^\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m/m!$ (desenvolupament en sèrie de Taylor de l'exponencial)

demostrar els

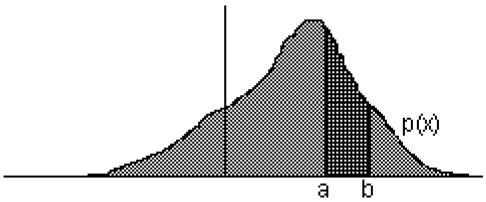
Teorema 1.20: $\sum_{m=0}^{\infty} P^{\Pi}(m) = 1$

Teorema 1.21: $\mu(\Pi(\mu)) = \mu$

Teorema 1.22: $\sigma(\Pi(\mu))^2 = \mu$

Activitat 1.21.
Problema 1.9: suposant que la probabilitat d'obtenir un preparat químic per un determinat procediment siga de 0'01, quin serà el número mitjà d'èxits i la probabilitat de tenir al menys un èxit en 200 probes? Obtenir el valor exacte per la distribució binomial i el valor aproximat per la distribució de Poisson i comparar-los.

Activitat 1.22. Si tenim una variable aleatòria que varia de forma contínua en R, haurem de definir un conjunt d'intervals de la mateixa per determinar les freqüències o probabilitats dels valors en cada interval, com vam fer al Problema 1.2 amb la longitud de la mà. Però podem definir també una *distribució de densitat probabilística* mitjançant una funció $p:R \to R^{+}+\{0\}$ que acomplisca $\int p(x)\,dx = 1$.



En aquest cas, la probabilitat d'un interval [a,b[vindrà donada per
$p([a,b]) = \int_a^b p(x)\,dx$
Naturalment, si fem una partició de R en un conjunt d'intervals disjunts, la suma de les seues probabilitats valdrà 1. A partir del
Teorema -1.6: per a tota funció integrable f i tot interval [a,b[de R, existeix $\xi \in [a,b[$ tal que
$\int_a^b x\cdot p(x)\,dx = \xi\cdot\int_a^b p(x)\,dx$
demostrar
Teorema 1.23: si tenim una distribució p de densitat probabilísitca, partim R en intervals disjunts $[z-\varepsilon,z+\varepsilon[$ prenent z com valor de l'interval, i definim la mitjana de la distribució de densitat probabilística com el límit de la mitjana de la corresponent distribució probabilística quan ε tendisca a zero, serà. $\mu(X) = \int x\cdot p(x)\,dx$.
Teorema 1.24: definint la variança d'una distribució p de densitat probabilística com $\mu((X-\mu(X))^2)$, serà
$\sigma^2(X) = \int x^2\cdot p(x)\,dx - \mu(X)^2$.

Activitat 1.23. Definim la *distribució normal* $N(\alpha,\beta)$ per $P^N(x) = e^{-(x-\alpha)^2/(2\beta^2)}/(\beta(2\pi)^{1/2})$ per a tot $x \in R$.
Tenint en compte el
Teorema -1.7: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u^2}du = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} u^2e^{-u^2}du = (\sqrt{\pi})/2$
demostrar els
Teorema 1.25: $\int_{-\infty}^{\infty} P^N(x)\,dx = 1$ (i per tant es tracta d'una distribució de densitat probabilística)
Teorema 1.26: $(N(\alpha,\beta)) = \alpha$
Teorema 1.27: $\sigma(N(\alpha,\beta)) = \beta$
Escriurem per tant $N(\mu,\sigma)$ i $P^N(x) = e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}/(\sigma(2\pi)^{1/2})$.

Activitat 1.24. Definim la distribució normal tipificada com N(0,1), de manera que $P^N(y) = e^{-y^2/2}/(2\pi)^{1/2}$.

Treballarem amb la tabla de la distribución normal tipificada. A partir d'aquesta, podem obtenir fàcilment els valors d'altra distribució normal mitjançant la normalització de la seua variable x, de manera que $y=(x-\mu)/\sigma$, i tenint en compte que $P^N(y)=\sigma\cdot P^N(x)$.
Problema 1.10. Utilitzant la tabla de la distribució normal tipificada, obtenir la densitat probabilística d'una distribució normal amb $\mu=5$, $\sigma=2$ per a $x=7'4$.

Activitat 1.25. La importància de la distribució normal per a l'estudi de l'Estadística resulta justificada pel següent
Teorema 1.28: si tenim una successió de variables aleatòries independents X^i amb la mateixa mitjana i desviació típica, $\mu(X^i)=\mu$, $\sigma(X^i)=\sigma$, i definim $Z^n = \sum_{i=1}^{n} X^i/n$, aleshores la distribució estadística de $\lim_{n\to\infty} N(Z^n)$ és la distribució normal tipificada N(0,1) (*Teorema central del límite*).
D'acord amb aquest teorema, la distribució normal donarà una bona aproximació de la mitjana d'un gran número de variables aleatòries equivalents independents, i podrem utilitzar-la quan treballem amb grans quantitats de dades. En particular, s'acompleix el
Teorema 1.29: $\lim_{n\to\infty} P^{B(p,n)}(m) / P^{N(np,\sqrt{(np(1-p))})}(m) = 1$ (teorema de De Moivre; per a cada valor de m, la successió de valors de n serà n=m, m+1, m+2...)
La distribució normal és una bona aproximació a la binomial si $n\cdot p>5$ i $n\cdot q>5$.
Problema 1.11: comparar les distribucions normal, binomial i de Poisson en els següents casos:
a) Aplicar la distribució normal per intentar aproximar la solució del Problema 1.9. Dóna una bona aproximació?
b) Suposant que la probabilitat d'obtenir un preparat químic per un determinat procediment siga de 0'5, quina serà la probabilitat de tenir únicament un fracàs en 10 probes? Obtenir el valor exacte per la distribució binomial i intentar aproximar-ho per les distribucions normal i de Poisson. Quina dóna una millor aproximació?

Treball 1 (per a la seua realització en equip**):**
Estudiar les condicions d'aproximació de les distribucions normal y de Poisson a la distribució binomial, utilitzant diferents fonts bibiogràfiques (per exemple
http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/eco/44/distripoisson.htm
http://www.suagm.edu/paginas/japaricio/384/clase11.pdf
http://www.jstor.org/sici?sici=0003-4851(196009)31%3A3%3C737%3ATPATTP%3E2.0.CO%3B2-Q&cookieSet=1
http://leonsotelo.blogspot.com/2007/06/aproximacion-normal-binomial-poiss0n.html
http://www.mitecnologico.com/Main/AproximacionDeBinomialPorDePoisson)
Estudiar i comparar en particular el cas n=30, p=1/6. Obtenir una tabla de les tres distribuciones (per a valors enters no negatius) i representar-les gràficament en la mateixa figura.

1.3. Fer estimacions sobre una població a partir d'una mostra:

Objectius:

1. Estudiar les propietats de les distribucions de les mostres d'una població.
2. Identificar els estadístics-paràmetres d'una mostra que millor permeten estimar els paràmetres de la població.
3. Construir intervals que continguen amb una certa probabilitat el valor d'un paràmetre poblacional.
4. Determinar la probabilitat d'equivocar-nos al rebutjar una hipòtesi a partir d'unes dades experimentals.
5. Treballar amb les distribucions adequades segons les mostres utilitzades i els paràmetres a estimar.
6. Contrastar hipòtesis probabilístiques.

Activitat 1.26. Una *mostra sense reemplaçament* és qualsevol subconjunt d'una població (un exemple típic és una mà de cartes d'una baralla). Una *mostra amb reemplaçament* s'obté escollint successivament un determinat número d'elements de la població sense llevar-los de la mateixa, de manera que poden repetir-se (en exemple típic és el resultat de tirades successives d'un dau). Anomenarem *estadístic* a qualsevol paràmetre poblacional restringit a una mostra. per a distingir-lo del corresponent paràmetre sobre la població, utilitzarem una nomenclatura diferent; així, designarem la mitjana d'una variable aleatòria X en una mostra per $\overline{X}$, i la seua desviació típica per s(X).
Treballarem amb distribucions en 3 àmbits: en la població, en una mostra i en el conjunt de totes les mostres. Naturalment, per poder fer estimacions sobre una població a partir d'una mostra necessitarem saber com es distribueixen els valors de l'estadístic corresponent en el conjunt de totes les mostres de la població d'un determinat tipus (amb o sense reemplaçament) i d'una determinada grandària; a aquesta distribució l'anomenarem *distribució mostral*. Les principals propietats d'aquesta es resumeixen en la següent tabla, on indiquem per n(U) la grandària de la població i per n la grandària de la mostra:

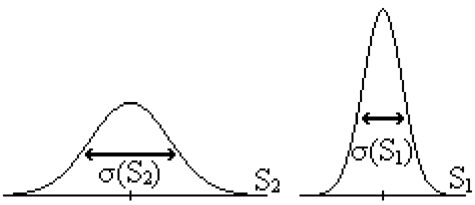
paràmetre poblacional Ω	estadístic S	distribució mostral sense reemplaçament $\mu(S)$, $\sigma(S)$	distribució mostral amb reemplaçament $\mu(S)$, $\sigma(S)$
$\mu(X)$	$\overline{X}$	$\mu(\overline{X}) = \mu(X)$	
		$\sigma(\overline{X})^2 = \sigma(X)^2(n(U)-n)/(n\cdot(n(U)-1))$	$\sigma(\overline{X})^2 = \sigma(X)^2/n$
$\sigma(X)$	s(X)	$\mu(s(X)^2) = \sigma(X)^2\cdot n/(n-1)$ $\sigma(s(X))^2 \approx \sigma(X)^2/(2n)$ si $n\geq100$	

Observem que si $n(U)=\infty$, aleshores la variança de la distribució mostral de mitjanes amb i sense reemplaçament són iguals. En la pràctica, podem utilitzar la fòrmula de la distribució mostral amb reemplaçament si la grandària n(U) de la població és molt més gran que la grandària n de la mostra. Si no diem el contrari, suposarem que aquest és el

cas.
Problema 1.12: Obtenir la variança de la distribució mostral de mitjanes i la mitjana de la distribució mostral de variances amb mostres formades per la repetició 3 vegades del llançament de 5 daus anotant en cada llançament el número d'asos obtinguts (suposant que els daus no estan carregats). Dividir la classe en grups de 3 de manera que cada membre faça un llançament de 5 daus, calculant en cada grup la mitjana i la variança de la mostra obtinguda. Calcular la variança de les mitjanes i la mitjana de les variances obtingudes per tota la classe i comparar-les amb els previs resultats teòrics.

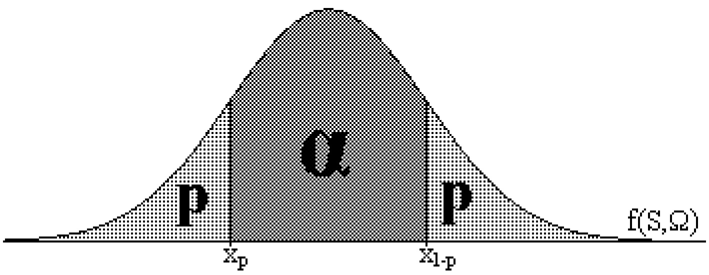
Activitat 1.27. Per a estimar correctament un paràmetre poblacional Ω necessitarem un estadístic S que siga un *estimador inesbiaixat* del mateix, de manera que $\mu(S) = \Omega$. En cas que no ho siga però conegam l'esbiaixament que es produeix, de manera que $\mu(S) = f(\Omega)$, essent f una funció lineal, podem definir un estimador corregit $\hat{S} = f^{-1}(S)$ tal que $\mu(\hat{S}) = \Omega$.
Exercici 1.5: analitzar si la mitjana $\overline{X}$ i la variança s^2 són o no estimadors inesbiaixats dels corresponents paràmetres poblacionals $\mu(X)$ i $\sigma(X)$. En cas que algú no ho siga, obtenir el corresponent estadístic corregit i comprovar que és un estimador inesbiaixat.

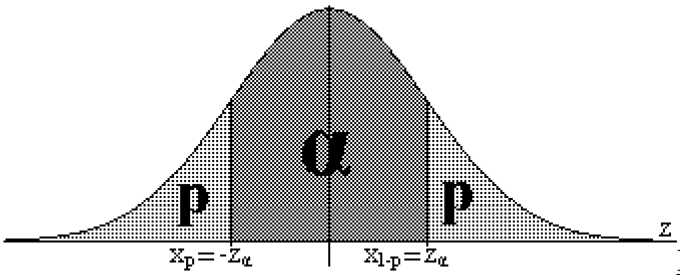
Activitat 1.28. Si tenim dos estimadors inesbiaixats S_1 i S_2, direm que S_1 és més eficient que S_2 si i solament si $\sigma(S_1)<\sigma(S_2)$.



Exercici 1.6: volem estimar la mitjana μ d'una població a partir de les mitjanes $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ de dues mostres de grandària respectiva n_1, n_2 tals que $n_1<n_2$. Quin estimador serà més eficient? Demostrar-ho.

Activitat 1.29. Direm que $[\Omega_1,\Omega_2]$ es un *interval de confiança* del 100α% per a un paràmetre poblacional Ω si la probabilitat de que Ω estiga dins d'aquest interval és igual a α. Per determinar-ho necessitarem conèixer la distribució mostral d'alguna funció $f(S,\Omega)$, essent S l'estadístic d'una mostra que utilitzem per estimar Ω. En general, buscarem en aquesta distribució mostral de densitat probabilística dos "pics" de probabilitat p, de manera que l'àrea entre els dos "pics" siga α, tal com s'indica en la figura adjunta. Observem que, per tal com l'àrea baix de la corva és 1, s'ha d'acomplir $2p+\alpha=1$. Les abcises corresponents a una determinada àrea s'anomenen *coeficients crítics*. Cal examinar amb cura la configuració de la tabla de la distribució i les gràfiques que l'acompanyen per determinar a quina àrea es refereix cada coeficient crític (part de l'esquerra, interior, exterior...) i quins són per tant els coeficients tals que $x_p \le f(S,\Omega) \le x_{1-p}$ ens dóna un interval de confiança per a Ω del 100α% .



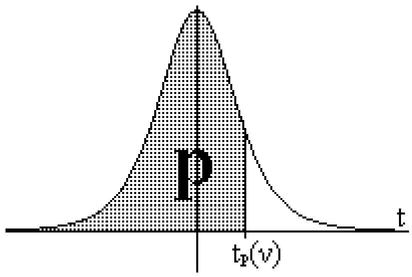


Exercici 1.7: si les mostres són grans ($n \geq 30$) i el paràmetre poblacional és la mitjana poblacional, aleshores prenent la normalització de la mitjana de la mostra,
$z = f(\overline{X},\mu) = (\overline{X}-\mu)/\sigma(\overline{X})$, es distribuirà aproximadament d'acord amb la distribució normal tipificada. Per obtenir l'interval de confiança haurem de calcular primer la mitjana i la desviació típica de la mostra, $\overline{X}$, s; a continuació calcular la desviació típica corregida $\hat{s}$, utilitzar-la com estimador inesbiaxat de la desviació típica poblacional σ, i a partir del valor estimat d'aquesta obtenir la desviació típica de les mitjanes en la distribució mostral, $\sigma(\overline{X})$. Utilitzant la tabla de la distribució normal tipificada (inversa) per obtenir el coeficient crític z_α tal que la probabilitat de $|z| \leq z_\alpha$ siga α (recordem que la distribució normal tipificada és simètrica) podrem averiguar l'interval de confiança per a μ. Obtenir les fòrmules corresponents.
Problema 1.13: aplicar-ho a l'obtenció d'un interval de confiança del 80% per al número mitjà d'asos resultants de llançar 30 vegades un dau a partir dels resultats experimentals obtinguts per tots els alumnes de la classe (en un número no inferior a 30).

Activitat 1.30. Si per consideracions teòriques formulem la hipòtesi d'un valor per a un paràmetre poblacional Ω, i a partir d'una mostra experimental obtenim un interval de confiança del 100α% per a aquest paràmetre poblacional, si el valor teòric d'aquest està fora d'aquest interval, és a dir
$f(S,\Omega) \notin [x_p, x_{1-p}]$, poden haver dues explicacions: la primera és que la teoria i per tant la hipòtesi estiga equivocada; la segona és que la mostra siga "anòmala", de manera que essent correcta la teoria el paràmetro poblacional Ω estiga fora de l'interval de confiança del 100α%: la probabilitat d'això és $\beta=1-\alpha$. Direm així que la mostra ens permet rebutjar la hipòtesi amb un *nivell de significació* de β (que serà per tant la probabilitat de que s'equivoquem al rebutjar la hipòtesi). Naturalment, solament podrem rebutjar hipòtesis amb nivells de significació iguals o menors a 0'5, i quant menor siga el nivell de significació el rebuig de la hipòtesi tindrà més força.
Problema 1.14: amb quin nivell de significació podriem en el seu cas rebutjar la hipòtesi de que el dau del Problema 1.13 no està carregat (és a dir, que totes les cares del dau tenen la mateixa probabilitat de sortir)?

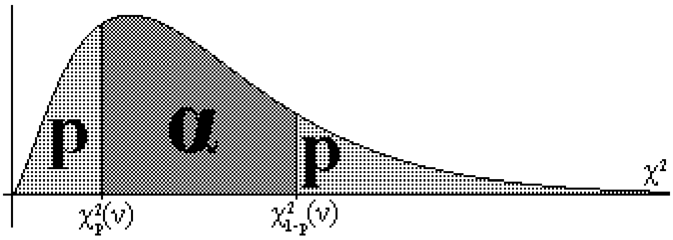
Activitat 1.31. Si les mostres són xicotetes, la seua distribució no s'aproxima a la normal. Però si una variable aleatòria X té una distribució normal en una població infinita, la distribució de l'estadístic
$t = f(\overline{X},\mu) = (\overline{X}-\mu(X))/\sigma(\overline{X})$ de les mostres de grandària n és $Y_\nu(t)=Y_\nu(0)\cdot(1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$
amb $\nu=n-1$, que s'anomena *distribució **t** de "Student"* amb ν graus de llibertat. $Y\nu(0)$ s'escollís de manera que $\int_{-\infty}^{+\infty} Y_\nu(t)dt=1$.
Tenint en compte que $e = \lim_{u\to\infty} (1+1/u)$, demostrar el
Teorema 1.30: $\lim_{\nu\to\infty} Y_\nu(t) = P^{N(0,1)}(t)$ (és a dir, la distribució **t** de "*Student*" s'aproxima a la distribució normal tipificada quan el número de graus de llibertat es fa molt gran); quan valdrà $Y_\infty(0)$?

Activitat 1.32. Utilitzarem la tabla de la distribució **t** de "*Student*" (inversa) per a determinar el coeficient crític $t_p(\nu)$ corresponent a l'interval de confiança del 100α% de la mitjana poblacional μ a partir de la mitjana $\overline{X}$ i la desviació típica s(X) d'una mostra de grandària n, amb les fòrmules obtingudes en l'Exercici 1.7.



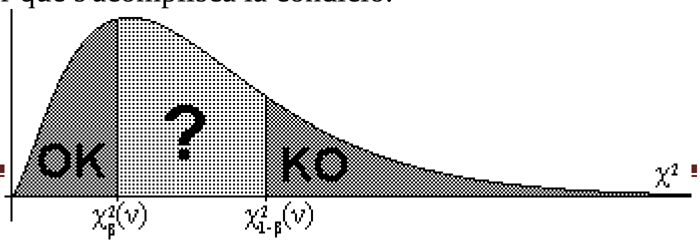
Problema 1.15: obtenir un interval de confiança del 90% per a la mitjana d'una variable aleatòria en una població infinita amb distribució normal a partir de la mostra (302'23, 302'21, 302'23, 302'22, 302'25).

Activitat 1.33.
Problema 1.16: formant grups de 3 a 5 estudiants, cada estudiant en cada grup haurà de llançar 30 vegades un dau i anotar el número d'asos obtinguts; fer estimacions al voltant de cada dau a partir de la mostra donada pels resultats obtinguts per cada grup.



Activitat 1.34. Si una variable aleatòria X té una distribució normal en una població infinita, la distribució de l'estadístic $\chi^2 = f(s,\sigma) = n\cdot s(X)^2/\sigma(X)^2$ de les mostres de grandària n entre 0 i ∞ és $V_\nu(\chi^2)=K_\nu\cdot(\chi^2)^{(\nu-2)/2}\cdot e^{-\chi^2/2}$ amb ν=n-1, que s'anomena *distribució Xi-quadrat* amb ν graus de llibertat. K_ν s'escollís de manera que $\int_0^\infty V_\nu(\chi^2)=1$. Utilitzarem la tabla de la distribució Xi-quadrat (inversa) per a determinar els coeficient crítics $\chi^2_p(\nu)$ corresponents a l'interval de confiança del 100α% de la desviació típica poblacional σ a partir de la desviació típica s(X) d'una mostra de grandària n, de manera que $\chi^2_p(\nu) \leq \chi^2 \leq \chi^2_{1-p}(\nu)$. Obtenir l'expressió per a l'interval de confiança de la desviació típica poblacional σ(X). Observem que la desviació típica corregida $\hat{s}(X)$ de la mostra ha d'estar necessàriament dins d'aquest interval, per tal com és un estimador inesbiaixat de la desviació típica poblacional.
Problema 1.17: obtenir un interval de confiança del 90% per a la desviació típica d'una variable aleatòria en una població infinita amb distribució normal a partir de la mostra (302'23, 302'21, 302'23, 302'22, 302'25); comprovar que la desviació típica corregida de la mostra està dins d'aquest interval.

Activitat 1.35: Si tenim un conjunt de k successos mutuament excloents E_i als que suposem una probabilitat $p(E_i)$ per a i=1...k, en n ocasions la freqüència esperada de cadascú d'ells serà respectivament $e_i=n\cdot p(E_i)$, corresponent a la mitjana obtinguda en el Teorema 1.16. Si en una mostra d'aquestes n ocasions les freqüències observades són respectivament oi, essent n≥30 i acomplint-se $e_i \geq 5$ per a tots els successos, aleshores l'estadístic $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (o_i-e_i)^2/e_i$ es distribuirà aproximadament d'acord amb la distribució Xi-quadrat amb ν=k-1 graus de llibertat. Si per a algun succés fora $e_i<5$ hauriem d'agregar successos fins aconseguir que s'acomplisca la condició.
Podem utilitzar aquest estadístic per estimar la concordància entre la hipòtesi probabilística i els resultats experimentals obtinguts

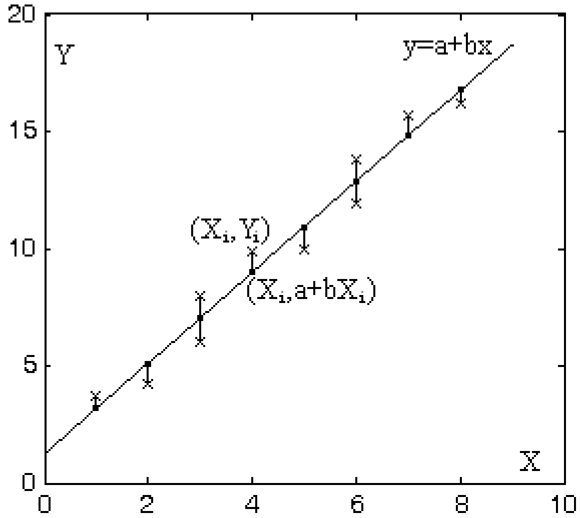


en la mostra. Naturalment, quan menor siga χ^2 hi haurà una major concordància: direm que hi ha *bona concordància* entre la mostra i la hipòtesi probabilística (i per tant acceptem aquesta) amb un nivell de significació de β si $\chi^2<\chi^2_\beta(\nu)$; pel contrari, si $\chi^2_{1-\beta}(\nu)<\chi^2$ podrem *rebutjar* la hipòtesi probabilística amb un nivell de significació de β (que serà de nou la probabilitat d'equivocar-nos al rebutjar-la, és a dir la probabilitat de que la hipòtesi siga correcta però hagem trobat una mostra entre el 100β% de les mostres més desviades de les freqüències mitjanes esperades); finalment si $\chi^2_\beta(\nu)\leq\chi^2\leq\chi^2_{1-\beta}(\nu)$ direm que els resultats experimentals no son decisius amb aquest nivell de significació per a acceptar o rebutjar la hipòtesi probabilística. Observem que una hipòtesi probabilística pot ser acceptada (o rebutjada) amb un nivell de significació "feble" i els resultats no ser decisius amb un nivell de significació més fort. El que no pot passar és que amb un nivell de significació acceptem una hipòtesi i amb altre nivell de significació la rebutgem. Naturalment, el nivell de significació més feble que podem utilitzar és el de β=0'5: si $\chi^2<\chi^2_{0'5}(\nu)$ tindrem tendència a acceptar la hipòtesis amb un nivell de significació major o menor, i si $\chi^2>\chi^2_{0'5}(\nu)$ tindrem tendència a rebutjar-la.
Problema 1.18: contrastar la hipòtesi de que un dau no està carregat (que totes les cares tenen la mateixa probabilitat de sortir) llançant-lo 30 vegades i anotant el número de vegades que surt cada cara.

Treball 2 (per a la seua realització en equip)**:**
En 100000 tirades de 5 daus s'obté 10 repoquer, 300 pòquers, 3342 trios, 16030 parelles i 40198 simples asos. Es podria acusar que els daus estan trucats? Amb quin nivell de significació, en tal cas?

1.4. Obtenir una recta que tinga la menor desviació possible d'un conjunt de punts:

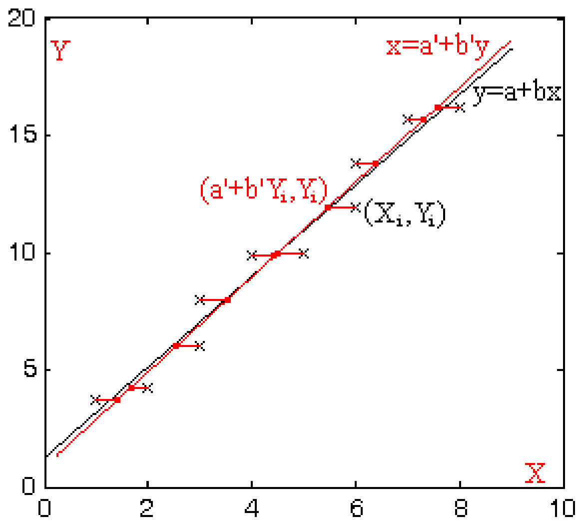
Objectius:

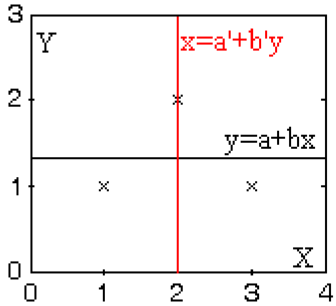
1. Obtenir la recta que minimitze la suma de les desviacions quadràtiques de les ordenades d'un conjunt de punts.
2. Obtenir la recta que minimitze la suma de les desviacions quadràtiques de les abcises d'un conjunt de punts.
3. Valorar el grau d'ajust de la recta de regressió al corresponent conjunt de punts.
4. **Activitat 1.36.** Si tenim un conjunt de punts $\{X_i, Y_i\}$i=1...n, direm que y=a+bx és la *recta de regressió* de Y sobre X si i sols si $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-(a+bX_i))^2$ és mínim.
   

   Tenint el compte el
   <u>Teorema -1.8:</u> si una funció derivable f(x,y) té un mínim en (a,b), aleshores f_x'(a,b)=0 i f_y'(a,b)=0
   demostrar
   <u>Teorema 1.31:</u> si y=a+bx és la recta de regressió de Y sobre X, aleshores a+b·μ(X)=μ(Y), a·μ(X)+b·μ(X^2)=μ(XY).
   <u>Teorema 1.32:</u> si y=a+bx és la recta de regressió de Y sobre X, aleshores b=$c_{XY}/\sigma(X)^2$, a=μ(Y)-b·μ(X), on c_{XY}=μ(XY)-μ(X)·μ(Y) (*covariança* de X i Y).

5. **Activitat 1.37.** Tenint en compte el
   <u>Teorema -1.9:</u> si per a una funció f(x,y) derivable fins a segon ordre s'acompleix f_x'(a,b)=0, f_y'(a,b)=0, f_{xx}"(a,b)>0, f_{xy}"(a,b)^2<f_{xx}"(a,b)·f_{yy}"(a,b), aleshores f(x,y) té un mínim en (a,b)
   demostrar el
   <u>Teorema 1.33:</u> si $\sigma(X)^2>0$, b=$c_{XY}/\sigma(X)^2$, aleshores y-μ(Y)=b·(x-μ(X)) és la recta de regressió de Y sobre X.
   Observem que el "centre de mases" (μ(X),μ(Y)) pertany sempre a la recta de regressió.
   <u>Problema 1.19:</u> obtenir la recta de regresió del número de calcer sobre l'edat en l'alumnat assistent a classe; valorar-la.

6. **Activitat 1.38.** Intercanviant la X i la Y obtenim el
Teorema 1.34: si $\sigma(Y)^2>0$, $b'=c_{XY}/\sigma(Y)^2$, aleshores $x-\mu(X)=b\cdot(y-\mu(Y))$ és la recta de regressió de X sobre Y.
Si $\sigma(X)^2>0$ i $\sigma(Y)^2>0$, ambdues rectes de regressió passaran pel "centre de masses" $(\mu(X),\mu(Y))$, i definim el *coeficient de correlació* de X i Y per
$\rho_{XY} = c_{XY}/(\sigma(X)\sigma(Y))$.
Demostrar
Teorema 1.35: les rectes de regressió de Y sobre X i de X sobre Y coincideixen si i sols si $\rho_{XY} = \pm 1$.
Teorema 1.36: si $\rho_{XY} = 0$, aleshores les rectes de regressió són $y=\mu(Y)$, $x=\mu(X)$ (perpendiculars).





Activitat 1.39. Direm que dues variables aleatòries X, Y no tenen correlació lineal si i sols si $\rho_{XY}=0$; aquesta condició és equivalent a la de $c_{XY}=0$ amb $\sigma(X)>0$ i $\sigma(Y)>0$.
Demostrar el
Teorema 1.36: si dues variables aleatòries són independents, no tenen correlació lineal.
La recíproca és certa? Comprobar-ho en el següent

Problema 1.20: estudiar la correlació lineal en el cas

X	1	2	3
Y	1	2	1

X i Y són independents?

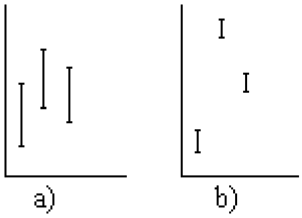
Activitat 1.40. Demostrar
Teorema 1.37: $\sigma(X\pm Y)^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 \pm 2\cdot c_{XY}$.
Teorema 1.38: si X,Y són independents o simplement no tenen correlació lineal, aleshores $\sigma(X\pm Y)^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2$.

Activitat 1.41. Demostrar, utilitzant el Teorema 1.37,
Teorema 1.39: Si $y=a+bx$ és la recta de regressió de Y sobre X, aleshores $\sigma(Y-bX)^2 = \sigma(Y)^2(1-\rho_{XY}^2)$.
Teorema 1.40: $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
Si $\rho_{XY}>0$ direm que X,Y tenen correlació lineal positiva; si $\rho_{XY}<0$, direm que X,Y tenen correlació lineal positiva; si $|\rho_{XY}|\approx 1$, direm que X,Y tenen bona correlació lineal; si $\rho_{XY}\approx 0$, direm que X,Y tenen mala correlació lineal.
Problema 1.21: estudiar la correlació lineal entre el número de calcer i l'edat de l'alumnat assistent a classe; valorar-la.

1.5. Estimar si un conjunt de mostres pertanyen a la mateixa població:

Objectius:

1. Obtenir un estimador inesbiaixat de la variança poblacional a partir de la mitjana de les variances d'un conjunt de mostres.
2. Obtenir un estimador inesbiaixat de la variança poblacional a partir de la variança de les mitjanes d'un conjunt de mostres pertanyents a la mateixa població.
3. Avaluar per anàlisi de variança si un conjunt de mostres independents pertanyen a la mateixa població.



Activitat 1.42. Si tenim un conjunt de mostres independents obtingudes per diferents procediments, en cas que aquests procediments siguen equivalents la dispersió entre les mostres haurà de ser proporcionada a la dispersió dins de cada mostra (figura a).Per tal de avaluar-ho, treballarem amb m mostres de grandària n i anomenarem:
X_{jk} a l'element k de la mostra j
$\overline{X}_j$ i $s(X_j)^2$ respectivament a la mitjana i la variança de la mostra j
$\overline{X}$a la mitjana de la mostra de grandària m·n resultant de mesclar les m mostres de grandària n.
Demostrar el
<u>Teorema 1.41:</u> $\overline{X}= \sum_j \overline{X}_j/m$.

Activitat 1.43. Anomenarem *variança dintre de variables* a la mitjana de les variances $s_w^2 = \sum_j s(X_j)2/m$.
Suposarem que totes les mostres pertanyen a poblacions si més no amb la mateixa variança σ^2 .
Demostrar el
<u>Teorema 1.42:</u> $\mu(s_w^2) = \sigma^2\cdot(n-1)/n$.
Anomenarem per tant *variança corregida dintre de variables* a $\hat{s}_w^2 = s_w^2\cdot n/(n-1)$, la qual serà un estimador inesbiaixat de la variança poblacional σ^2 .

Activitat 1.44. Tenint en compte el
<u>Teorema 1.43:</u> si les variables aleatòries independents Y_1, Y_2 tenen tenen distribució Xi-quadrat amb graus de llibertat ν_1 i ν_2 respectivament, aleshores la variable aleatòria Y_1+Y_2 té distribució Xi-quadrat amb $\nu_1+\nu_2$ graus de llibertat
demostrar el
<u>Teorema 1.44:</u> $mn\cdot s_w^2/\sigma^2$ té distribució Xi-quadrat amb m·(n-1) graus de llibertat.

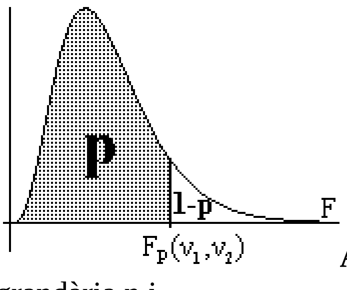
Activitat 1.45. Anomenarem
$\mu_j=\mu(X_j)$ a la mitjana de la població a la qual pertany la mostra j
$\mu=\mu(X)$ a la mitjana de la població resultant de mesclar les poblacions a les quals pertanyen les m mostres
$\alpha_j=\mu_j-\mu$ para cada mostra j (naturalment, valdrà 0 si totes les mostres pertanyen a la mateixa població).
Demostrar que en qualsevol cas s'acompleix el <u>Teorema 1.45:</u> $\sum_j \alpha_j = 0$.
Activitat 1.46. Anomenarem *variança entre variables* a la variança de les mitjanes

$s_b^2 = \sum_j (\overline{X}_j - \overline{X})^2/m = \sum_j \overline{X}_j^2/m - \overline{X}^2$.
Recordant de l'Activitat 1.26 que $\sigma(\overline{X}_j)^2=\sigma^2/n$, $\sigma(\overline{X})^2=\sigma^2/(mn)$, demostrar
Teorema 1.46: $\mu(\overline{X}_j^2) = \sigma^2/n + (\mu+\alpha_j)^2$
Teorema 1.47: $\mu(\overline{X}^2) = \sigma^2/(mn) + \mu^2$
Teorema 1.48: $\mu(s_b^2) = \sigma^2(m-1)/(mn) + \sum_j \alpha_j^2/m$.

Activitat 1.47. Anomenarem variança corregida entre variables a $\hat{s}_b^2 = s_b^2\cdot nm/(m-1)$. Demostrar el
Teorema 1.49: $\mu(\hat{s}_b^2) = \sigma^2 + n\cdot\sum_j \alpha_j^2/(m-1)$.
Per tant, $\hat{s}_b^2$ serà un estimador inesbiaixat de la variança poblacional σ^2 si i sols si les poblacions a les quals pertanyen les diferents mostres tenen totes la mateixa mitjana (el que anomenem *hipòtesi nul·la* en la qual tot $\alpha_j=0$), cosa que naturalment passarà si totes les mostres pertanyen a la mateixa població. En aquest cas, $F=\hat{s}_b^2/\hat{s}_w^2$ haurà de ser proper a la unitat. En altre cas $\mu(\hat{s}_b^2)>\sigma^2$, i per tant es pot preveure que F siga major que la unitat.

Activitat 1.48. Tenint en compte que s_b^2 és la variança de la mostra $(\overline{X}_1, \overline{X}_2,\ldots\overline{X}_m)$, de grandària m, i que $\sigma(\overline{X}_j)^2=\sigma^2/n$, demostrar que si les mostres pertanyen a la mateixa població s'acompleix el
Teorema 1.50: $mn\cdot s_b^2/\sigma^2$ té distribució Xi-quadrat amb m-1 graus de llibertat.

Activitat 1.49. Tenint el compte el
Teorema 1.51: si les variables aleatòries independents Y_1, Y_2 tenen tenen distribució xi-quadrat amb graus de llibertat ν_1 i ν_2 respectivament, aleshores la distribució de $F=(Y_1/\nu_1)/(Y_2/\nu_2)$ entre 0 i ∞ és
$W_{\nu1,\nu2}(F) = K_{\nu1,\nu2}\cdot F^{\nu_1/2-1}/(1+\nu_1\cdot F/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}$, que s'anomena distribució *F de Snedecor* amb graus de llibertat ν_1 i ν_2 . $K_{\nu1,\nu2}$ s'escollís de manera que $\int_0^\infty W_{\nu1,\nu2}(F)\, dF = 1$
demostrar el
Teorema 1.52: si tenim m mostres independents de grandària n pertanyents a la mateixa població, aleshores
$F=\hat{s}_b^2/\hat{s}_w^2$ té una distribució F de Snedecor amb graus de llibertat ν_1=m-1, ν_2=m·(n-1) .



Activitat 1.50. Si tenim m mostres independents de grandària n i
$F=\hat{s}_b^2/\hat{s}_w^2 > F_p(m-1, m\cdot(n-1))$, essent $F_p(\nu_1, \nu_2)$ el coeficient crític de la distribució F de Snedecor amb graus de llibertat ν_1 i ν_2 tal que la probabilitat d'un valor menor o igual a aquest coeficient siga p, aleshores podem rebutjar amb un nivell de significació β=1-p la hipòtesis nul·la de que les mostres pertanguen a la mateixa població. Utilitzarem les tables de la distribució F de Snedecor (inversa) per determinar el corresponent coeficient crític.
Problema 1.22: anotar el número de calcer en vàries mostres de la mateixa grandària entre l'alumnat assistent a classe i valorar si pertanyen a la mateixa població (a ser possible, procurar que alguna de les mostres estiga formada únicament per xics i altra

únicament per xiques).

Activitat 1.51. Com hauríem d'interpretar el fet que $F=\hat{s}_b^2/\hat{s}_w^2 << 1$? Aplicar-ho a la resolució del següent

Problema 1.23: calcular l'estadístic F corresponent al següent parell de mostres:
X_1=(24'2, 25'3, 25'4, 26'2, 27'5)
X_2=(24'2, 25'3, 25'4, 26'2, 27'4)
Es pot considerar que les mostres no acomplisquen alguna de les premises del Teorema 1.52?
Per a valorar-ho amb un cert nivell de significació podem utilitzar la relació
$F_p(\nu_1, \nu_2)=1/F_{1-p}(\nu_2, \nu_1)$.

Treball 3 (per a la seua realització en equip)**:**
Comparar diferents procediments per a obtenir algun preparat químic utilitzant alguna variable aleatòria adequada (quantitat del preparat, temps per a la seua obtenció, etc.). Obtenir les dades d'experiències reals i utilitzar un mínim de 3 procediments aplicant com a mínim 5 vegades cada procediment. Estimar per anàlisi de variança si els diferents procediments es poden considerar equivalents.

2. Obtenir aproximacions discretes a la solució de diferents problemes (INTRODUCCIÓ AL CÀLCUL NUMÈRIC):

Activitat 1.1: Debatir en grups menuts el següent text, escollint prèviament un portaveu de cada grup per exposar posteriorment les conclusions i en el seu cas les dubtes suscitades:

Des de Leibnitz i Newton, s'ha desenvolupat fonamentalment la matemàtica ***contínua****. Això anava acompanyat d'una concepció del món segons la qual les variables reals variarien de forma contínua, però responia també a raons pràctiques: el tractament de variables* ***discretes*** *exigeix un gran número de càlculs per als quals no es disposava d'instruments adequats, mentre que sí es disposava de poderosos mètodes analítics, de càlcul diferencial i integral, per al tractament de variables contínues. Tanmateix, hi havia un gran número de problemes que no es podien resoldre amb aquestos mètodes analítics.*

Tanmateix, actualment la situació ha canviat radicalment: per una banda, es reconeix, amb una forta fonamentació en la mecànica quàntica, que donades les limitacions en la precisió de les dades experimentals, sempre treballem realment amb variables discretes; i per altra banda, l'ús dels ordinadors permet la realització del càlculs massius necessaris per al tractament d'aquestes variables discretes.

El ***càlcul numèric*** *consisteix en una sèrie de mètodes per obtindre aproximacions discretes a la solució de diferents problemes.*

Així, si tenim els valor de $\boldsymbol{f(x_i)}$ *per a determinats valors de* $\boldsymbol{x_i}$*, buscarem aproximar per* ***interpolació*** *el valor de* $\boldsymbol{f(x)}$ *per a un nou valor de* $\boldsymbol{x}$*; es `poden utilitzar diferents funcions d'interpolació, depenent de l'estimació que es faça de les característiques de* $\boldsymbol{f(x)}$*; en aquest curs, aproximarem únicament mitjançant funcions polinòmiques, fent el que s'anomena interpolació polinòmica. Però si el nou valor de* $\boldsymbol{x}$ *es troba fora de l'interval delimitat pels* $\boldsymbol{x_i}$ *prèviament estudiats, estarem fent realment una extrapolació: l'aproximació polinòmica de* $\boldsymbol{f(x)}$ *ens donarà aleshores una hipòtesi a contrastar amb noves dades.*

*Igualment, hi ha molts problemes d'****integració*** *que no es poden resoldre de forma analítica, és a dir, no podem obtenir una funció integral contínua $y=F(x)$ la derivada de la qual satisfaga les condicions del problema. Però podrem tanmateix trobar solucions aproximades del seu valor numèric per a valors particulars de x.*

2.1. Interpolar el valor d'una funció polinòmica desconeguda que passe per un conjunt de punts:

Objectius:

1. Demostrar l'existència i unicitat del **polinomi interpolador** de grau menor o igual que **m** que passa per **m+1** punts d'abcises distintes.
2. Trobar una fórmula que ens done directament l'expressió del polinomi interpolador.
3. Trobar un mètode per a obtenir successivament punts interpolats a mesura que introduïm nous punts per a interpolar.
4. Trobar un mètode que ens done successius termes del polinomi interpolador.
5. Entendre els problemes de **fiabilitat** de la interpolació, especialment si es realitza fora de l'interval en el qual es tenen dades (extrapolació) o s'utilitzen polinomis d'un grau elevat.

Activitat 2.2. Tenint en compte la condició necessària i suficient perquè un sistema d'equacions lineals siga determinat, el valor del *determinant de Vandermonde*,
Teorema -2.1: $|x_k^i| = \prod_{k>i} (x_k-x_i)$
i la
Definició 2.1: direm que $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ és **un polinomi interpolador** de grau menor o igual que **m** en els punts
$\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ si i només si, per a tot k=0,1...m, $p(x_k)=f_k$,
demostrar el
Teorema 2.1: si per a tot $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, llavors existeix un únic polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en els punts $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$.

Activitat 2.3. Tenint en compte que
$\sum_{i=0}^{m} \Xi_i = \Xi_k + \sum_{i\neq k} \Xi_i$ per a tot k=0,1...m, i que
$\prod_{j\neq i} \Xi_{kj} = \Xi_{kk}\cdot\prod_{j\neq i \,\&\, j\neq k} \Xi_{kj}$ per a tot $i\neq k$.
demostrar el

Teorema 2.2: si per a tot $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, llavors $p(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i \dfrac{\prod_{j\neq i} (x-x_j)}{\prod_{j\neq i} (x_i-x_j)}$
és el polinomi interpolador de $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ (**mètode de Lagrange**).

Activitat 2.4.
Problema 2.1: donats els punts

$x_{k.}$	1.	2.	4.	5.
f_k	0.	2.	12.	21.

obtenir pel mètode de Lagrange la seua interpolació per a x=3.
(suggeriment: a l'aplicar la fórmula, escriure primer cada denominador per a evitar errors)

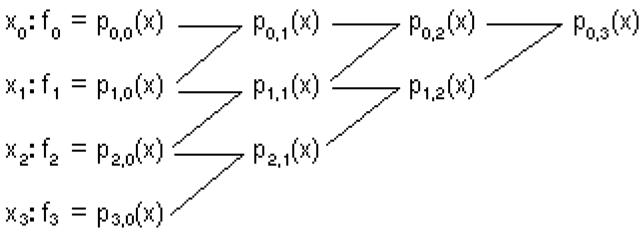
Activitat 2.5. Demostrar el

<u>Teorema 2.3:</u> si per a tot i,j=0,1...m, si $i \neq k$, llavors $x_i \neq x_k$,
& si $i+j \leq m$, llavors $p_{i,j}$ és el polinomi interpolador de grau menor o igual que j en $\{(x_k,f_k) / k=i,i+1...i+j\}$,
llavors per a tot j=1...m, i=0,1...m-j,

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x_{i+j}-x)p_{i,j}-1 + (x-x_i)p_{i+1,j-1.}}{x_{i+j} - x_i}$$

(suggeriment: comprovar que $p_{i,j}(x_i)=f_i$ & $p_{i,j}(x_{i+j})=f_{i+j}$ & per a tot k=i+1...i+j-1, $p_{i,j}(x_k)=f_k$).

Activitat 2.6. Tenint en compte que, amb els $p_{i,j}$ definits en el Teorema 22,
<u>Teorema 2.4:</u> per a tot i=0,1...m & per a tot $x \in R$, $p_{i,0}(x) = f_i$
i
<u>Teorema 2.5:</u> $p_{0,m}$ és el polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$,
utililizar l'algorisme



(**mètode de Neville**)

per a resoldre el
<u>Problema 2.2:</u> donats els punts

x_k	1.	2.	4.
f_k	0.	2.	12.

obtenir pel mètode de Neville la seua interpolació per a x=3 .
Afegir a continuació el punt $(x_3, f_3) = (5, 21)$ i obtenir la nova interpolació per a x=3 .
Comparar el resultat obtingut amb el del problema 10.

Activitat 2.7. D'acord amb la

<u>Definició 2.2:</u> amb $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ tal que per a tot i,j=0,1...m, si $i \neq k$, llavors $x_i \neq x_k$,
definirem les **diferències dividides** $f[x_i,x_{i+1},...x_j]$ mitjançant

$f[x_i] = f_i$ per a tot i=0,1...m

$$f[x_i,x_{i+1},x_j] = \frac{f[x_{i+1},...x_j] - f[x_i,...x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$ per a tot i=0,1...m-1 , j=i+1,...m

i calculant-les amb l'algorisme

$$\begin{array}{lllllll}
\mathbf{f[x_0]} & & & & & & \\
 & > \mathbf{f[x_0,x_1]} & & & & & \\
f[x_1] & & > \mathbf{f[x_0,x_1,x_2]} & & & & \\
 & > f[x_1,x_2] & & > \mathbf{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} & & & \\
f[x_2] & & > f[x_1,x_2,x_3] & & & & \\
 & > f[x_2,x_3] & & & & & \\
f[x_3] & & & & & &
\end{array}$$

Problema 2.3: comprovar a partir dels punts

k.	0.	1.	2.	3.
x_k	1.	2.	4.	5.
f_k	0.	2.	12.	21.

i comparant amb els resultats obtinguts pel mètode de Neville que, per a m=0,1,2,3,
$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{f[x_0,\ldots x_j]} \prod_{i=0}^{j-1} (x-x_i)$
és el polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1\ldots m\}$
(**mètode de Newton**)

Activitat 2.8. Assumint que l'error de la interpolació polinòmica de grau menor o igual que **m** ve donada per
Teorema -2.2: $f(x)-p_m(x) = [f^{(m+1)}(\xi(x))/(m+1)!] \prod_{i=0}^{m} (x-x_i)$ tal que $\xi(x)\in[a,b]$ tal que per a tot i=0,1...m, $x_i\in[a,b]$
Problema 2.4: fitar el valor de f(3) suposant que

x_k	1.	2.	4.	5.
$f(x_k)$	0.	2.	12.	21.

i que la quarta derivada de la funció f(x) en l'interval [1,5] està entre 1 i 2 .

2.2. Aproximar la integració d'una funció, acotant l'error d'aproximació:

Objectius:

1. Obtenir uns pesos W_k independents de la funció f(x) tals que sumant el seu producte pels corresponents valors de la funció en determinats nodes x_k, $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$, proporcione la integral exacta per a polinomis fins a un cert grau, i una bona aproximació per a altres funcions.
2. Aprendre a fitar l'error d'aquesta aproximació expressant-lo com el producte d'un factor C independent de la funció f(x) per la derivada d'un cert ordre **r** de la funció en algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b] , $Cf^{(r)}(\xi)$.
3. Estudiar el cas de nodes equidistants, $x_k=a+kh$ (Fórmula de Newton-Cotes).
4. Aprendre a millorar l'aproximació augmentant el nombre de nodes.

Metodologia específica:

- Utilitzar el mètode de coeficients indeterminats per a obtenir tant els pesos W_k d'integració com el factor C de l'error, a partir de la integral exacta de potències simples i resolent en grups menuts els corresponents sistemes d'equacions per a exposar públicament a continuació els resultats obtinguts.

Activitat 2.9. Tenint en compte la
Definició 2.3: sent f:[a,b]→R una funció integrable, cridarem **integral numèrica polinòmica** de **f** en els nodes x_k tals que $a\leq x_0<...<x_m\leq b$ a la integral en l'interval [a,b] del polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en els punts $\{(x_k,f(x_k))\}_{k=0,1...m}$
i utilitzant l'expressió del polinomi interpolador proporcionada pel mètode de Lagrange, justificar l'existència d'uns pesos W_k independents de la funció f(x) amb els quals $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$ siga la seua integral numèrica polinòmica.

Activitat 2.10. Tenint en compte que una integral numèrica polinòmica en **m+1** nodes és igual a la integral exacta per a polinomis de grau menor o igual que **m**, trobar un sistema d'equacions per a l'obtenció dels pesos W_k i demostrar que si per a tot i≠k, $x_i\neq x_k$, aquest sistema d'equacions té solució única.

Activitat 2.11. Tenint en compte el
Teorema -2.3: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'dt$
demostrar el
Teorema 2.6: en el cas de nodes equidistants $x_k=a+kh$, amb k=0,1...m, h=(b-a)/m, demostrar que els pesos per al càlcul de la corresponent integral numèrica polinòmica (pesos de **Newton-Cotes**) tenen la forma $W_k=hW'_k(m)$, on $W'_k(m)$, que són els pesos corresponents al cas h=1, només depenen de **k** i de **m** (però no de **a** i de **b**).
Pot utilitzar-se per a la demostració l'expressió dels pesos W_k obtinguda en l'Activitat 1, aplicant en la corresponent integral el canvi de variable x=a+th .

Activitat 2.12. Obtenir els pesos de Newton-Cotes per a m=2 i l'interval [0,2]. A partir dels mateixos, obtenir la fórmula general (**Fórmula de Simpson**) per a la integral numèrica polinòmica en els nodes {a, a+h, a+2h} = {a, (a+b)/2, b},
S =

Activitat 2.13.
Problema 2.5: aproximar mitjançant la Fórmula de Simpson $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$.

Activitat 2.14. Tenint en compte l'expressió de l'error de la interpolació polinòmica de grau menor o igual que **m** donada pel Teorema -2.2 , així com que

Teorema -2.4: per a tota funció integrable $f:[a,b]\rightarrow R$, $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Teorema -2.5: per a tot parell de funcions integrables $f:[a,b]\rightarrow R$, $g:[a,b]\rightarrow R^+$, existeix $\xi\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

demostrar el
Teorema 2.7: el valor absolut de l'error de la integral numèrica polinòmica en m+1 nodes pot fitar-se pel producte de dos factors, un dels quals depèn únicament dels nodes, i l'altre depèn únicament de la derivada d'ordre m+1 en algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b].

Activitat 2.15. Suposant que l'error d'un mètode d'integració aproximada siga de la forma

$$\varepsilon = C\cdot f^{(r)}(\xi)$$

per a algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b], deduir com utilitzar la funció $f(x)=x^r$ per a obtenir el valor de C.
NOTA: en cas d'obtenir-se C=0 pot inferir-se que el mètode és exacte per a aquesta funció, i haurà de repetir-se el procés substituint **r** per **r+1** .

Activitat 2.16. Tenint en compte el

Teorema -2.6: per a tot $f\in C^r(R\rightarrow R)$, $x\in C^1(R\rightarrow R)$, $\frac{d^r f}{dt^r}(x(t)) = (dx/dt)^r \frac{d^r f}{dx^r}(x)$

així com el Teorema -2.3 i el Teorema 2.6, demostrar el
Teorema 2.8: si l'expressió de l'error per a aproximar $\int_0^m f(t)dt$ amb nodes equidistants i h=1 és

$$\varepsilon' = C'\frac{d^r f}{dt^r}(\zeta) \text{ per a algun } \zeta\in[0,m],$$

llavors l'expressió general de l'error per a aproximar $\int_a^b f(x)dx$ amb nodes equidistants i h=(b-a)/m serà

$$\varepsilon = C.\frac{d^r f}{dx^r}(\xi) \text{ per a algun } \xi\in[a,b] \text{ amb } C=h^{r+1}\,C'$$

Activitat 2.17. Obtenir l'expressió de l'error per a la Fórmula de Simpson per a l'interval [0,2] (amb h=1), i a partir d'ella obtenir l'expressió general de l'error per a la Fórmula de

Simpson per a l'interval [a,b] (amb h=(b-a)/2),
ε_S =
Indicar per a quins polinomis serà exacta aquesta fórmula.

Activitat 2.18.
Problema 2.6: fitar l'error de la Fórmula de Simpson aplicada a $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$. Valorar-lo.

Activitat 2.19. Tenint en compte la
Definició 2.4: sent f:[a,b]→R una funció integrable, anomenarem **integral numèrica composta** de grau **m** en els MM+1 nodes $\{a+kh\}_{k=0,1...MM}$, amb h=(b-a)/(mN), a.

$$\sum_{i=0}^{M-1} N_m(i) ,$$

on $N_m(i)$ és la fórmula de Newton-Cotes de grau **m** per a la integració numèrica polinòmica de la funció f(x) en l'interval [a+imh,a+(i+1)mh] ,
demostrar el
Teorema 2.9: per a tota funció integrable f:[a,b]→R , la seua integral numèrica composta de grau 2 en els 2M+1 nodes $\{a+kh\}_{k=0,1...2M}$, amb h=(b-a)/(2M) (**regla de Simpson**), ve donada per

$$[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + ... + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]\ h/3.$$
$$= [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{M-1} 2f(a+2ih) + \sum_{i=0}^{M-1} N4f(s+(2i+1)h)](b-a)/(6M)$$

Activitat 2.20. Tenint en compte el
Teorema -2.7: per a tota funció contínua f:[a,b]→R i tot conjunt de punts $\xi_i \in [a,b]$, i=1...n, existeix $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = nf(\xi)$$

demostrar el
Teorema 2.10: per a tota $f \in C^4([a,b],R)$, l'error de la regla de Simpson per aproximar $\int_a^b f(x)dx$ ve donat per

$$\varepsilon_{RS} = - f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(2880M^4) \text{ per a algun } \xi \in [a,b]$$

Activitat 2.21.
Problema 2.7: quin increment **h** hauríem de prendre per a obtenir una aproximació a $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$ amb un error menor a 0'01 mitjançant la regla de Simpson?

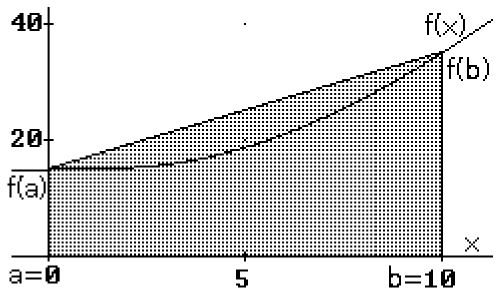
Treball 4 (per a la seua realització en equip)**:**
Obtenir els coeficients W_0, W_1 que fan que

$$W_0 f(a) + W_1 f(b),$$

done el resultat exacte de la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

si f(x) és un polinomi de grau menor o igual que 1 (**Fòrmula del Trapeci** o de Newton-Cotes per a m=1). Obtenir l'expressió de l'error per a qualsevol funció analítica f(x).

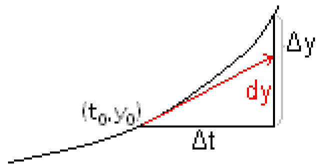


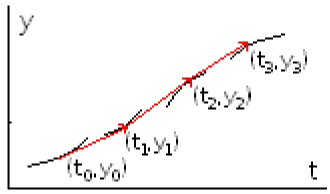
Utilitzar-ho per a fitar $\int_0^{10} (225+x^3)^{½}dx$ sabent que |f ''(x)|<0'6 en aquest interval.

2.3. Obtenir el valor futur d'una variable coneguent el seu valor inicial y la dependència de la seua derivada respecte del temps i la mateixa variable, y'=f(t,y):

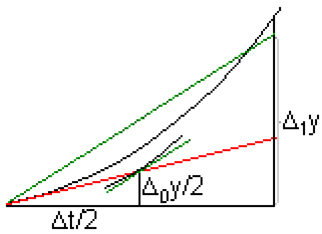
Objectius:

1. Aproximar solucions d'una equació diferencial a partir d'unes condicions inicials substituint l'increment per la diferencial (MÈTODE D'EULER).
2. Obtenir una aproximació de segon ordre a les solucions d'una equació diferencial (MÈTODE DE RUNGE).
3. Generalitzar la Fòrmula de Simpson per a integrar equacions diferencials (MÈTODE DE RUNGE-SIMPSON).
4. Obtenir una aproximació de quart ordre a les solucions d'una equació diferencia (MÈTODE DE KUTTA).





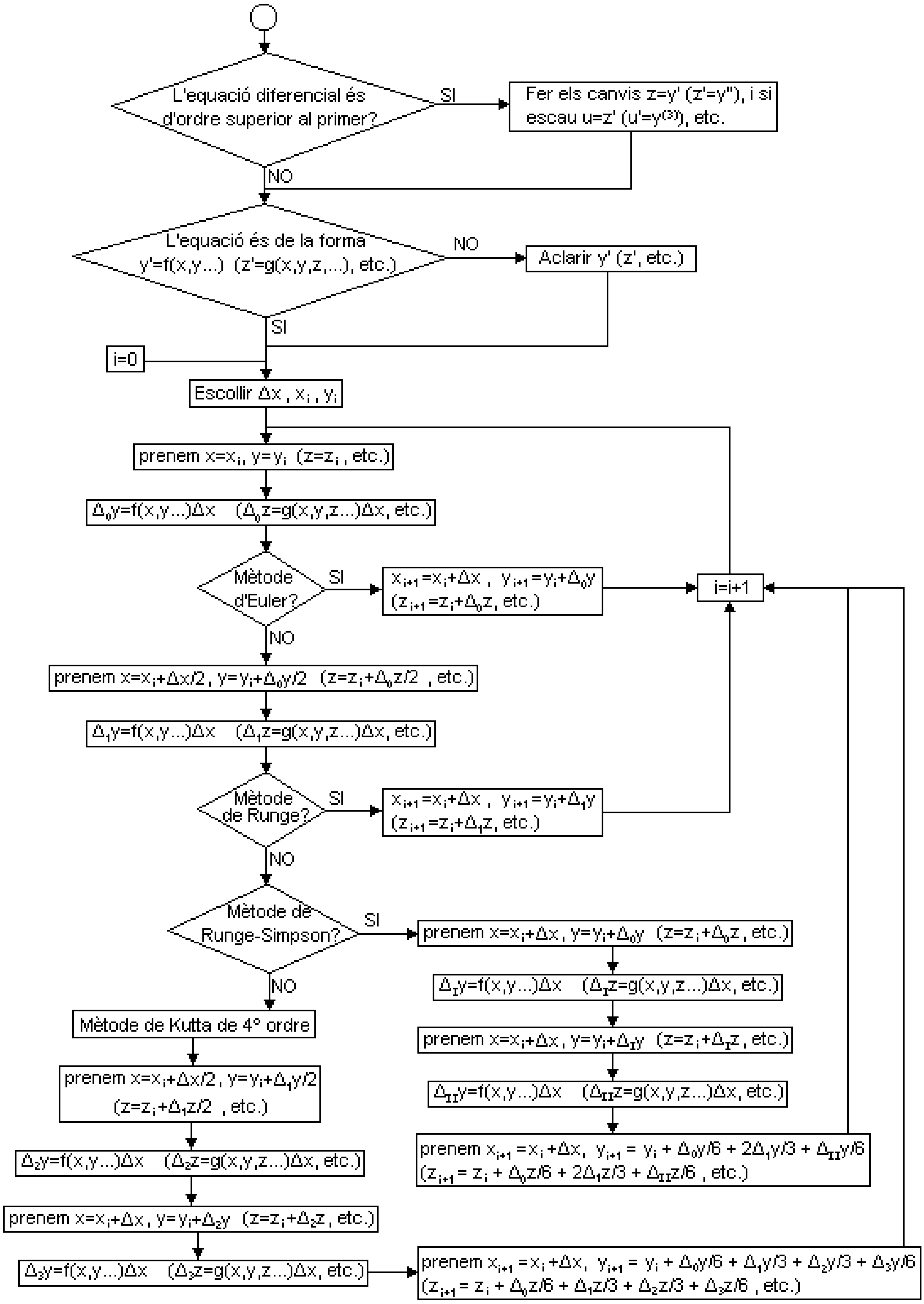
Activitat 2.22. Si coneguem $y'=f(t,y)$ així com la condició inicial $y_0=y(t_0)$, tenint en compte el <u>Teorema -2.8:</u> si $y(t)$ és una funció derivable fins al segon ordre,
$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\Delta t + y''(\xi)\cdot(\Delta t)^2/2$ tal que $\xi\epsilon[t_0, t]$
s'acomplirà $y(t) = y_0 + f(t_0,y_0)\cdot\Delta t + \Theta\cdot(\Delta t)^2$. Així doncs, si substituim $\Delta y=y(t)-y_0$ per $dy=y'\cdot\Delta t=f(t_0,y_0)\cdot\Delta t$ l'error serà proporcional a $(\Delta t)^2$, i si Δt és suficientment xicotet podrem aproximar l'evolució de la variable y aplicant successivament $t_{i+1}=t_i+\Delta t$, $y_{i+1} = y_i + \Delta_0 y$ amb $\Delta_0 y=f(t_i,y_i)\cdot\Delta t$ (**mètode d'Euler**).
<u>Problema 2.8:</u> aplicar el mètode d'Euler per aproximar el valor de y quan t=1 coneguent que y=1 quan t=0 i que $y'=0'1y^2-ty$. Prendre $\Delta t=0'2$ i representar-ho gràficament.



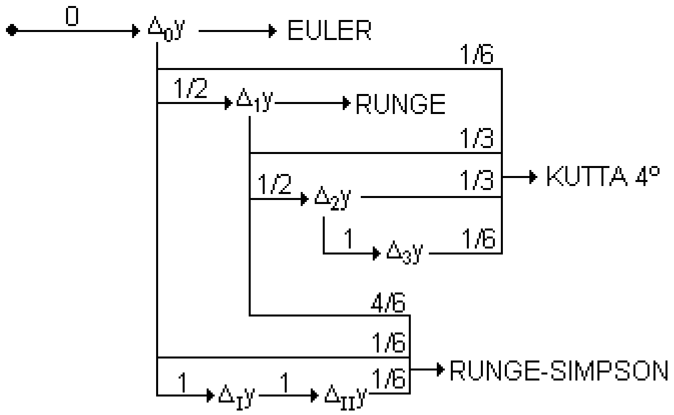
Activitat 2.23. El mètode d'Euler donaria un resultat exacte si la derivada y', representada per la pendent de la corva, fora constant (i per tant la segona derivada valguera zero). Si no és així, trobarem que la derivada en el punt (t_1,y_1) serà $f(t_1,y_1)=f(t_0+\Delta t,y_0+\Delta_0 y)\neq f(t_0,y_0)$. En aquest cas, podem obtenir una millor aproximació si calculem la derivada en el punt intermedi $(t_0+\Delta t/2,y_0+\Delta_0 y/2)$ i prenem $y_1=y_0+\Delta_1 y$ amb $\Delta_1 y=f(t_0+\Delta t/2,y_0+\Delta_0 y/2)\cdot\Delta t$, i així successivament (**mètode de Runge** de segon ordre); en aquest cas l'error és proporcional a $(\Delta t)^3$.
<u>Problema 2.9:</u> aplicar el mètode de Runge de segon ordre per aproximar el valor de y quan t=0'4 coneguent que y=1 quan t=0 i que $y'=0'1y^2-ty$. Prendre $\Delta t=0'2$.

Activitat 2.24. Amb el mètode de Runge de segon ordre hem millorat l'aproximació calculant un nou increment per a la funció y a partir d'un punt auxiliar (en aquest cas, intermedi). Podem obtenir millors aproximacions escollint successivament de forma adequada nous punts auxiliars. En particular, si prenem successivament
$\Delta_I y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_0 y)\cdot\Delta t$
$\Delta_{II} y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_I y)\cdot\Delta t$
obtindrem una aproximació de tercer ordre, amb error proporcional a $(\Delta t)^4$, si prenem $t_1=t_0+\Delta t$, $y_1 = y_0 + \Delta_0 y/6 + 4\cdot\Delta_1 y/6 + \Delta_{II} y/6$ i així successivament (**mètode de Runge-Simpson**).
Comprovar que en el cas particular en que tinguem $y'=f(x)$, aquest mètode és equivalent a la Fòrmula de Simpson.

Activitat 2.25. Podem obtenir una aproximació de quart ordre, amb error proporcional a $(\Delta t)^5$, si prenem
$\Delta_2 y=f(t_0+\Delta t/2, y_0+\Delta_1 y/2)\cdot\Delta t$
$\Delta_3 y=f(t_0+\Delta t, y_0+\Delta_2 y)\cdot\Delta t$
i finalment
$t_1=t_0+\Delta t$, $y_1 = y_0 + \Delta_0 y/6 + \Delta_1 y/3 + \Delta_2 y/3 + \Delta_3 y/6$ i així successivament (**mètode de Kutta** de quart ordre).
Tenim recopilats els diferents mètodes en el següent diagrama de fluxes:


L'equació diferencial és d'ordre superior al primer?
SI
Fer els canvis z=y' (z'=y''), i si escau u=z' ($u'=y^{(3)}$), etc.
NO
L'equació és de la forma y'=f(x,y...) (z'=g(x,y,z,...), etc.)
NO
Aclarir y' (z', etc.)
SI
i=0
Escollir Δx, x_i, y_i
prenem $x=x_i$, $y=y_i$ ($z=z_i$, etc.)
$\Delta_0 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_0 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
Mètode d'Euler?
SI
$x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_0 y$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_0 z$, etc.)
i=i+1
NO
prenem $x=x_i+\Delta x/2$, $y=y_i+\Delta_0 y/2$ ($z=z_i+\Delta_0 z/2$, etc.)
$\Delta_1 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_1 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
Mètode de Runge?
SI
$x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_1 y$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_1 z$, etc.)
NO
Mètode de Runge-Simpson?
SI
prenem $x=x_i+\Delta x$, $y=y_i+\Delta_0 y$ ($z=z_i+\Delta_0 z$, etc.)
$\Delta_I y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_I z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x=x_i+\Delta x$, $y=y_i+\Delta_I y$ ($z=z_i+\Delta_I z$, etc.)
$\Delta_{II} y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_{II} z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_0 y/6+2\Delta_1 y/3+\Delta_{II} y/6$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_0 z/6+2\Delta_1 z/3+\Delta_{II} z/6$, etc.)
NO
Mètode de Kutta de 4º ordre
prenem $x=x_i+\Delta x/2$, $y=y_i+\Delta_1 y/2$ ($z=z_i+\Delta_1 z/2$, etc.)
$\Delta_2 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_2 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x=x_i+\Delta x$, $y=y_i+\Delta_2 y$ ($z=z_i+\Delta_2 z$, etc.)
$\Delta_3 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_3 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_0 y/6+\Delta_1 y/3+\Delta_2 y/3+\Delta_3 y/6$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_0 z/6+\Delta_1 z/3+\Delta_2 z/3+\Delta_3 z/6$, etc.)

Podem utilitzar també el següent diagrama per tal de recordar a partir de quin increment s'obté un nou increment (amb increment total o amb mig increment) i quins coeficients hem d'utilitzar per obtenir l'increment final:



Per al mètode de Kutta de quart ordre podem realitzar els càlculs en la següent tabla:

t_i y_i	t_0 y_0				$t_1 = t_0+\Delta t$ $y_1 = \Delta_0 y/6 + \Delta_1 y/3 + \Delta_2 y/3 + \Delta_3 y/6$
t y y' $\Delta_0 y$ $\Delta_1 y$ $\Delta_2 y$ $\Delta_3 y$	t_0 y_0 $f(t,y)$ $\Delta_0 y$	$t_0+\Delta t/2$ $y_0+\Delta_0 y/2$ $f(t,y)$ $\Delta_1 y$	$t_0+\Delta t/2$ $y_0+\Delta_1 y/2$ $f(t,y)$ $\Delta_2 y$	$t_0+\Delta t$ $y_0+\Delta_2 y$ $f(t,y)$ $\Delta_3 y$	

Confeccionar tables similars per als altres mètodes.

Naturalment, alhora d'aplicar les tables les expressions es substitueixen per números.

<u>Problema 2.10:</u> aplicar el mètode de Kutta de quart ordre per aproximar el valor de y quan t=0'6 coneguent que y=1 quan t=0 i que $y'=0'1y^2-ty$. Prendre $\Delta t=0'2$.