1.2. Estudiar casos típics de distribucions estadístiques de probabilitats:

Objectius:

1. Treballar les distribucions estadístiques a partir de les freqüències relatives (probabilitats).
2. Averiguar la distribució probabilística del número d'ocurrències d'un succés entre un número d'ocasions independents. (distribució binomial).
3. Aproximar la distribució probabilística del número d'ocurrències d'un succés rar coneguent el número mitjà d'ocurrències entre un número gran d'ocasions independents (distribució de Poisson).
4. Introduir la distribució de densitat probabilística d'una variable aleatòria que varia de forma contínua.
5. Estudiar la distribució de densitat probabilística de la mitjana d'un gran número de variables aleatòries equivalents independents (distribución normal).

Activitat 1.11. Per a comparar distribucions estadístiques sobre diferents poblacions hauriem d'utilitzar les corresponents freqüències relatives o *probabilitats*, definides per $p(x)=f(x)/n(U)$.
Demostrar els següents teoremes:
Teorema 1.10: $\sum_x p(x) = 1$ (anomenarem *distribució probabilística* a qualsevol aplicació $p:V\to R^+ +\{0\}$ que acomplisca aquesta propietat, essent V un conjunt numerable de valors).
Teorema 1.11: $\mu(X) = \sum_x x\cdot p(x)$ (utilitzarem aquesta expressió per definir la mitjana de qualsevol distribució probabilísitica amb independència de la grandària finita o infinita de la població).
Exercici 1.4: representar gràficament en diagrames de pastís les distribucions probabilístiques de les variables aleatòries de l'activitat 1.3.

Activitat 1.12. Si tenim un conjunt A de valors d'una variable aleatòria, la seua probabilitat vindrà definida per
$p(A) = \sum_{x\in A} p(x)$. Demostrar el
Teorema 1.12: Si A i B són dos conjunts disjunts de valors d'una variable aleatòria, $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Activitat 1.13. Direm que dues variables X, Y són independents si per a qualsevol parell (x, y) de valors respectius de les mateixes s'acompleix $p(x,y)=p(x)\cdot p(y)$.
Problema 1.6: estudiar si les variables aleatòries de l'Activitat 1.3 són independents.

Activitat 1.14. Tenint en compte el
Teorema -1.1: el número de maneres en que podem escollir m elements entre n és

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ (*combinacions* de n sobre m)

demostrar el
Teorema 1.13: Si que tenim n variables-ocasions independents amb un determinat valor-succés amb la mateixa probabilitat p, la probabilitat de no ocurrència de cada

succés serà $q=1-p$ i.la probabilitat de que el número d'ocurrències del succés siga exactament m serà

$P^B(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$ (*distribució binomial* $B(p,n)$)

Per a demostrar-ho, estudiar primer la probabilitat d'una determinada sèrie ordenada de m ocurrències i n-m no ocurrències, i després el número de maneres d'ordenar m ocurrències i n-m no ocurrències, tenint en compte que són indiferents les permutacions entre sí de les ocurrències i les no ocurrències.
Problema 1.7: calcular la probabilitat d'obtenir exactament 3 asos en 5 llançaments d'un dau.

Activitat 1.15. Tenint en compte el

Teorema -1.2: $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}$ (*binomi de Newton*)

demostrar el

Teorema 1.14: $\sum_{m=0}^{n} P^B(m) = 1$

Activitat 1.16. Tenint en compte el
Teorema -1.3: $0!=1$, $m!=m\cdot(m-1)!$
demostrar els

Teorema 1.15: per a tot $m=1...n$, $\binom{n}{m}\cdot m = n\cdot\binom{n-1}{m-1}$

Teorema 1.16: $\mu(B(p,n)) = np$.

Activitat 1.17. Demostrar els

Teorema 1.17: per a tot $m=2...n$, $m\cdot\binom{n-1}{m-1} =)n-1)\cdot\binom{n-2}{m-2} + \binom{n-1}{m-1}$

Teorema 1.18: $\sigma(B(p,n))^2 = npq = np(1-p)$

Activitat 1.18.
Problema 1.8: obtenir la mitjana i la desviació típica del número d'asos al llançar 30 vegades un dau.

Activitat 1.19. Si p és molt xicotet, per a obtenir una mitjana μ apreciable d'ocurrències d'un succés necessitarem un número n molt gran d'ocasions. Però els factorials n!, i per tant la distribució binomial, són difícils de calcular si n és gran. En aquest cas, haurem d'utilitzar una aproximació. A tal efecte, i tenint en compte que $e = \lim_{u\to\infty} (1+1/u)$, i per tant
Teorema -1.4: $\lim_{n\to\infty} (1-\mu/n) = e^{-\mu}$
demostrar el
Teorema 1.19: si $p=\mu/n$, $P^\Pi(m) = \lim_{n\to\infty} P^B(m) = e^{-\mu}\cdot\mu^m/m!$ (*distribució de Poisson* $\Pi(\mu)$).
La distribució de Poisson és una bona aproximació a la binomial si $n>50$, $p<0'1$ i $\mu=np<5$.

Activitat 1.20. Tenint en compte el

Teorema -1.5: $e^{\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m/m!$ (desenvolupament en sèrie de Taylor de l'exponencial)

demostrar els

Teorema 1.20: $\sum_{m=0}^{\infty} P^{\Pi}(m) = 1$

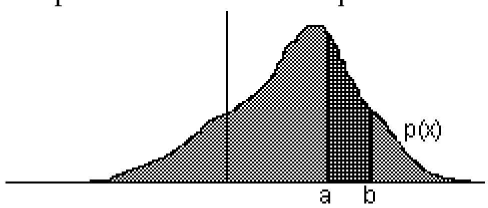
Teorema 1.21: $\mu(\Pi(\mu)) = \mu$

Teorema 1.22: $\sigma(\Pi(\mu))^2 = \mu$

Activitat 1.21.

Problema 1.9: suposant que la probabilitat d'obtenir un preparat químic per un determinat procediment siga de 0'01, quin serà el número mitjà d'èxits i la probabilitat de tenir al menys un èxit en 200 probes? Obtenir el valor exacte per la distribució binomial i el valor aproximat per la distribució de Poisson i comparar-los.

Activitat 1.22. Si tenim una variable aleatòria que varia de forma contínua en R, haurem de definir un conjunt d'intervals de la mateixa per determinar les freqüències o probabilitats dels valors en cada interval, com vam fer al Problema 1.2 amb la longitud de la mà. Però podem definir també una *distribució de densitat probabilística* mitjançant una funció $p: R \rightarrow R^{+} + \{0\}$ que acomplisca $\int p(x)\,dx = 1$.



En aquest cas, la probabilitat d'un interval [a,b[vindrà donada per

$p([a,b]) = \int_a^b p(x)\,dx$

Naturalment, si fem una partició de R en un conjunt d'intervals disjunts, la suma de les seues probabilitats valdrà 1. A partir del

Teorema -1.6: per a tota funció integrable f i tot interval [a,b[de R, existeix $\xi \in [a,b[$ tal que

$\int_a^b x \cdot p(x)\,dx = \xi \cdot \int_a^b p(x)\,dx$

demostrar

Teorema 1.23: si tenim una distribució p de densitat probabilísitca, partim R en intervals disjunts $[z-\varepsilon, z+\varepsilon[$ prenent z com valor de l'interval, i definim la mitjana de la distribució de densitat probabilística com el límit de la mitjana de la corresponent distribució probabilística quan ε tendisca a zero, serà. $\mu(X) = \int x \cdot p(x)\,dx$.

Teorema 1.24: definint la variança d'una distribució p de densitat probabilística com $\mu((X-\mu(X))^2)$, serà

$\sigma^2(X) = \int x^2 \cdot p(x)\,dx - \mu(X)^2$.

Activitat 1.23. Definim la *distribució normal* $N(\alpha,\beta)$ per $P^N(x) = e^{-(x-\alpha)^2/(2\beta^2)}/(\beta(2\pi)^{1/2})$ per a tot $x \in R$.

Tenint en compte el

Teorema -1.7: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2} du = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = (\sqrt{\pi})/2$

demostrar els

Teorema 1.25: $\int_{-\infty}^{\infty} P^N(x)\,dx = 1$ (i per tant es tracta d'una distribució de densitat

probabilística)
Teorema 1.26: $(N(\alpha,\beta)) = \alpha$
Teorema 1.27: $\sigma(N(\alpha,\beta)) = \beta$
Escriurem per tant $N(\mu,\sigma)$ i $P^N(x) = e^{-(x-\mu)2/(2\sigma 2)}/(\sigma(2\pi)^{1/2})$.

Activitat 1.24. Definim la distribució normal tipificada com N(0,1), de manera que $P^N(y) = e^{-y2/2}/(2\pi)^{1/2}$.
Treballarem amb la tabla de la distribución normal tipificada. A partir d'aquesta, podem obtenir fàcilment els valors d'altra distribució normal mitjançant la normalització de la seua variable x, de manera que $y=(x-\mu)/\sigma$, i tenint en compte que $P^N(y)=\sigma\cdot P^N(x)$.
Problema 1.10. Utilitzant la tabla de la distribució normal tipificada, obtenir la densitat probabilística d'una distribució normal amb $\mu=5$, $\sigma=2$ per a x=7'4.

Activitat 1.25. La importància de la distribució normal per a l'estudi de l'Estadística resulta justificada pel següent
Teorema 1.28: si tenim una successió de variables aleatòries independents X^i amb la mateixa mitjana i desviació típica, $\mu(X^i)=\mu$, $\sigma(X^i)=\sigma$, i definim $Z^n = \sum_{i=1}^{n} X^i/n$, aleshores la distribució estadística de $\lim_{n\to\infty} N(Z^n)$ és la distribució normal tipificada N(0,1) (*Teorema central del límite*).
D'acord amb aquest teorema, la distribució normal donarà una bona aproximació de la mitjana d'un gran número de variables aleatòries equivalents independents, i podrem utilitzar-la quan treballem amb grans quantitats de dades. En particular, s'acompleix el
Teorema 1.29: $\lim_{n\to\infty} P^{B(p,n)}(m) / P^{N(np,\sqrt{(np(1-p))})}(m) = 1$ (teorema de De Moivre; per a cada valor de m, la successió de valors de n serà n=m, m+1, m+2...)
La distribució normal és una bona aproximació a la binomial si $n\cdot p>5$ i $n\cdot q>5$.
Problema 1.11: comparar les distribucions normal, binomial i de Poisson en els següents casos:
a) Aplicar la distribució normal per intentar aproximar la solució del Problema 1.9. Dóna una bona aproximació?
b) Suposant que la probabilitat d'obtenir un preparat químic per un determinat procediment siga de 0'5, quina serà la probabilitat de tenir únicament un fracàs en 10 probes? Obtenir el valor exacte per la distribució binomial i intentar aproximar-ho per les distribucions normal i de Poisson. Quina dóna una millor aproximació?

Treball 1 (per a la seua realització en equip)**:**
Estudiar les condicions d'aproximació de les distribucions normal y de Poisson a la distribució binomial, utilitzant diferents fonts bibiogràfiques (per exemple
http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/eco/44/distripoisson.htm
http://www.suagm.edu/paginas/japaricio/384/clase11.pdf
http://www.jstor.org/sici?sici=0003-4851(196009)31%3A3%3C737%3ATPATTP%3E2.0.CO%3B2-Q&cookieSet=1
http://leonsotelo.blogspot.com/2007/06/aproximacion-normal-binomial-poiss0n.html
http://www.mitecnologico.com/Main/AproximacionDeBinomialPorDePoisson)
Estudiar i comparar en particular el cas n=30, p=1/6. Obtenir una tabla de les tres distribuciones (per a valors enters no negatius) i representar-les gràficament en la mateixa figura.