Tema 2: Resoldre per aproximacions successives una equació no lineal del tipus f(x)=0 :

Objectius:

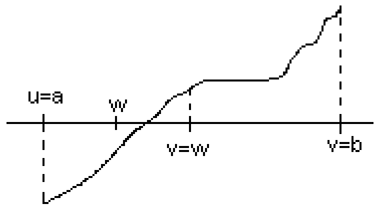
1. Desenvolupar un algorisme que ens permeta anar fitant en intervals cada vegada més menuts una solució de l'equació f(x)=0 tenint en compte el **signe** de f(x) en els extrems d'un interval.
2. Desenvolupar un algorisme que ens permeta anar aproximant-nos cada vegada més a una solució de l'equació f(x)=0 tenint en compte el **valor** de f(x) en els extrems d'un interval.
3. Desenvolupar un algorisme que ens permeta anar fitant en intervals tan menuts com vulguem una solució de l'equació f(x)=0 tenint en compte el valor de f(x) en els extrems d'intervals **successius**.
4. Desenvolupar un algorisme que ens permeta anar aproximant-nos cada vegada més a una solució de l'equació f(x)=0 tenint en compte el valor de f(x) en un punt i la seua **derivada**.
5. Entendre les **dificultats** que es troben amb els diferents algorismes per a aproximar-se o fitar una solució de l'equació f(x)=0.
6. Estudiar la velocitat de **convergència** d'una successió que tendisca a una solució de l'equació f(x)=0.
7. Desenvolupar un algorisme que permeta convergir el més **ràpidament** possible cap a una solució de l'equació f(x)=0.

Metodologia:

- Reflexionar col·lectivament, en grups menuts i en el conjunt de la classe, sobre diferents procediments per a aproximar-se a una solució de l'equació f(x)=0.
- Deduir l'ordre de convergència de diferents mètodes de recerca d'una solució de l'equació f(x)=0, en classe (en grups menuts exposant a continuació les conclusions obtingudes) i a través un treball en equip.
- Treballar en aula d'informàtica elaborant programes per a aproximar una solució de l'equació f(x)=0, executar-los i valorar els resultats obtinguts.

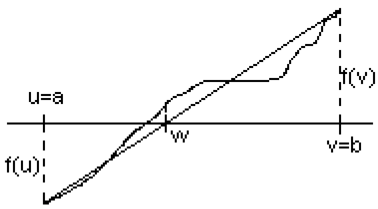
Activitats:

Activitat 1: tenint en compte el Teorema de Bolzano,
Teorema -4: Per a tot interval $[a,b]$ de nombres reals, i tota funció contínua $f : [a,b]\rightarrow R$, si $f(a)\cdot f(b)<0$, llavors existeix un nombre $x\in[a,b]$ tal que $f(x)=0$,
si es compleix la premissa del teorema i prenent inicialment $u=a$ & $v=b$, calculant $w=(u+v)/2$ i examinant el signe de $f(w)$, estudiar quin nou interval hauríem de prendre per a seguir fitant la solució (**mètode de la Bisecció**).



Pot experimentar-se gràficament amb un "applet" en
http://centres5.pntic.mec.és/marque12/matem/bolzano.htm
Pot trobar-se un model d'algorisme en http://www.uv.és/pla/Tutoria/mniq/algorit1.gif
Si reiterem el procés fins que la longitud de l'interval siga menor que una tolerància ε, de què dependrà, en general, el nombre de vegades que hàgem de reiterar-lo?

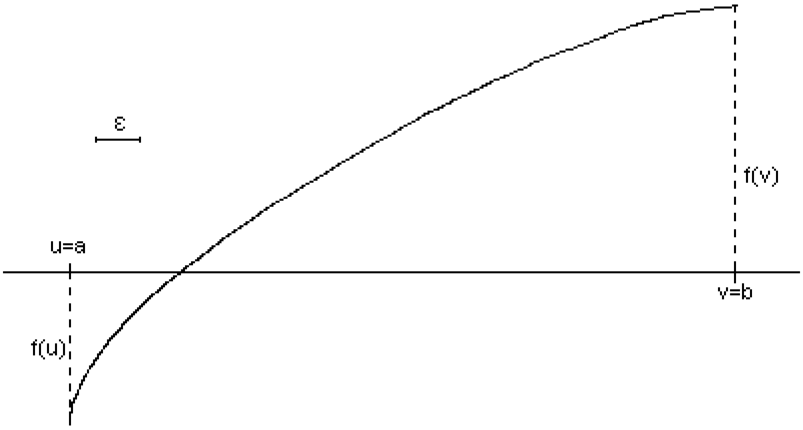
Activitat 2.
Problema 4: Si $a=0$, $b=8$, $\varepsilon=0.25$, quants passos seran necessaris com a màxim per a arribar a una solució aproximada amb aqueixa cota d'error? Obtenir una expressió general que ens done el nombre de passos en funció de a, b i ε.
Activitat 3 . Suposant $a< b$ & $f(a)\cdot f(b)<0$ i prenent inicialment $u=a$ & $v=b$, obtenir l'equació de la recta que passa pels punts $(u,f(u))$ & $(v,f(v))$ i calcular el punt $(w,0)$ que talla a l'eix d'abcises,
w =



Examinant el signe de $f(w)$, estudiar quin nou interval hauríem de prendre per a seguir fitant la solució (**mètode de Regula- Falsi**).
Pot experimentar-se gràficamente amb un "applet" en
http://www.apropos-logic.com/nc/RegulaFalsiAlgorithm.html
Pot trobar-se un model d'algorisme en
http://www.uv.és/pla/Tutoria/mniq/algorit2.gif

Activitat 4

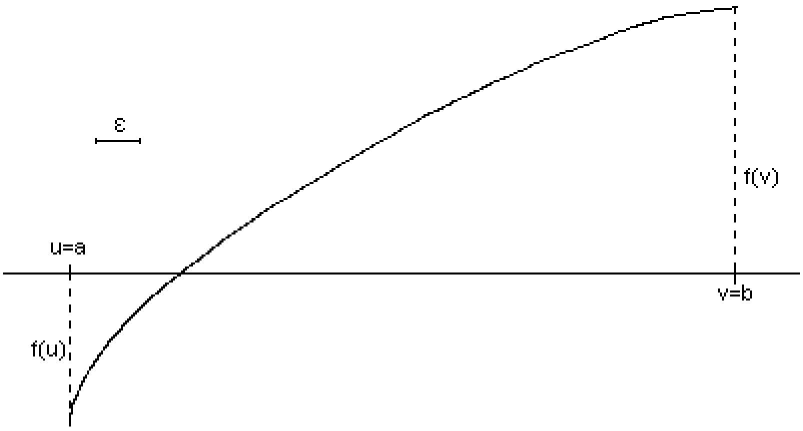
Problema 5: Aplicar el mètode de Regula-Falsi en la figura adjunta fins que la longitud de l'interval siga menor a la del segment indicat (ε):

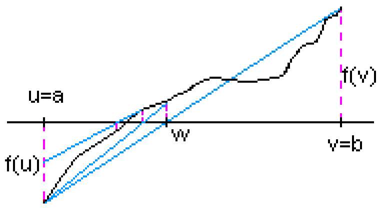


Analitzar les dificultats trobades per a finalitzar el problema i reflexionar sobre com superar-les.

Activitat 5.

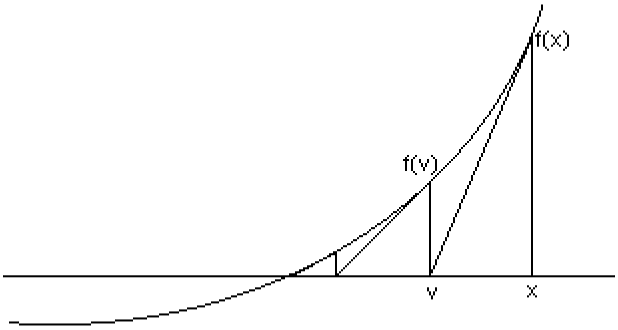
Problema 6 . Repetir el problema anterior en la figura adjunta modificant el mètode seguit de manera que quan dos valors intermedis w consecutius ens donen valors de f(w) amb el mateix signe, en comptes de tornar a traçar la recta fins al mateix punt que en el pas anterior, es trace fins a un punt amb la meitat de l'ordenada, segons es mostra en la figura menuda (**mètode de Regula-Falsi modificat**)





Pot trobar-se un model d'algorisme en http://www.uv.és/pla/Tutoria/mniq/algorit3.gif
Pot experimentar-se gràficament amb un "applet" (adaptat per a Netscape 4.5) en http://www.uv.és/pla/java/Regulafa.html

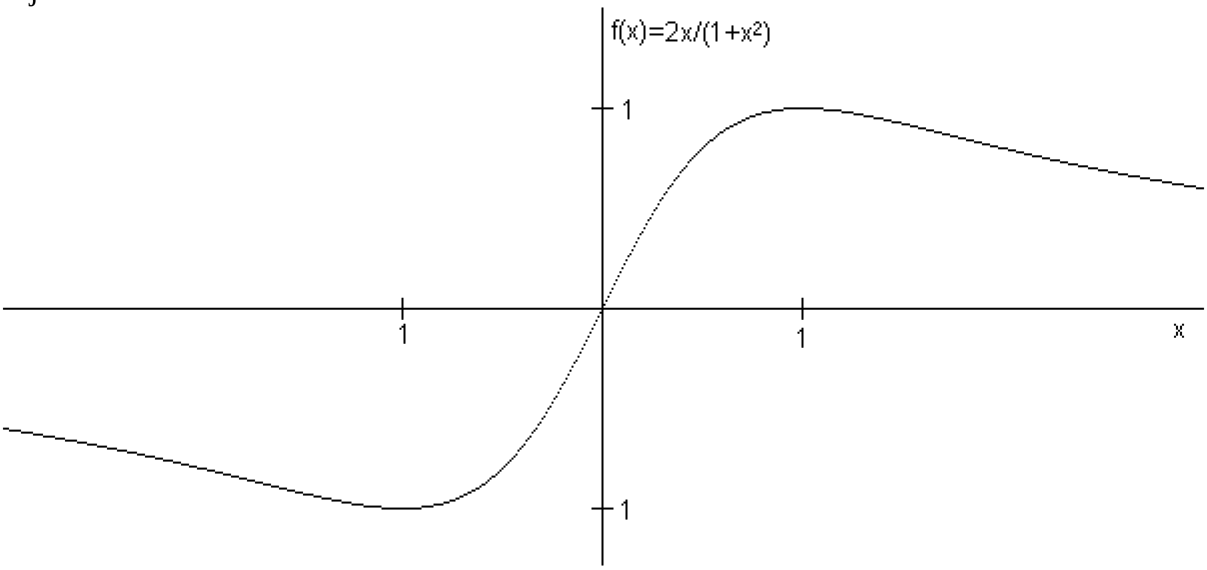
Activitat 6 . Calculant per a un valor **x** els valors de la funció f(x) i de la seua derivada f '(x), obtenir l'equació de la recta tangent corresponent (recta que passa pel punt (x,f(x)) de pendent f '(x)) i calcular el punt (v,0) que talla a l'eix d'abcises,
v =



Discutir les dificultats que poden trobar-se per a aproximar la solució de l'equació f(x)=0 aplicant reiteradament el procés anterior (**mètode de Newton**) i les precaucions que caldria adoptar
Pot trobar-se un model d'algorisme en
http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/algorit4.gif
Pot experimentar-se gràficament amb un "applet" (adaptat per a Netscape 4.5) en
http://www.uv.és/pla/java/Newton.html

Activitat 7

Problema 7: Aplicar el mètode de Newton a l'equació $f(x)=2x/(1+x^2)$ a partir del punt $x=1/3^{½}$ (fer els càlculs sense aproximar). Interpretar el resultat a partir de la figura adjunta.



Activitat 8. Definint l'**ordre de convergència** d'una successió per la

Definició 8: Donats $p \in R^+$, $\alpha \in R$ i la successió de nombres reals $(x_n)_{n \in N}$ tal que $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, direm que aquesta successió té ordre de convergència p si i només si existeix un nombre real $L \neq 0$ tal que

$$L=\lim_{n\to\infty} (x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)^p$$

& si p=1, llavors $|L|<1$.

i utilitzant l'expressió del *desenvolupament en sèrie de Taylor* fins al segon ordre del

Teorema -5: Per a tot interval [a,b] de nombres reals, tota funció real contínua i derivable fins a segon ordre en aquest interval, $f \in C^2([a,b],R)$, i tot parell de nombres $\alpha, x \in [a,b]$, existeix $\xi \in [\alpha, x]$ tal que

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + f''(\xi)(x-\alpha)^2/2$$

demostrar que per a la successió obtinguda pel *mètode de Regula-Falsi* es compleix

Teorema 16: Per a tot $f \in C^2([x_0,y_0],R)$, $x_0,y_0 \in R$ tals que $f(x_0)\cdot f(y_0) \neq 0$, si per a tot $n \in N$,

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)(y_n-x_n)/(f(y_n)-f(x_n))$

$y_{n+1} = y_n$

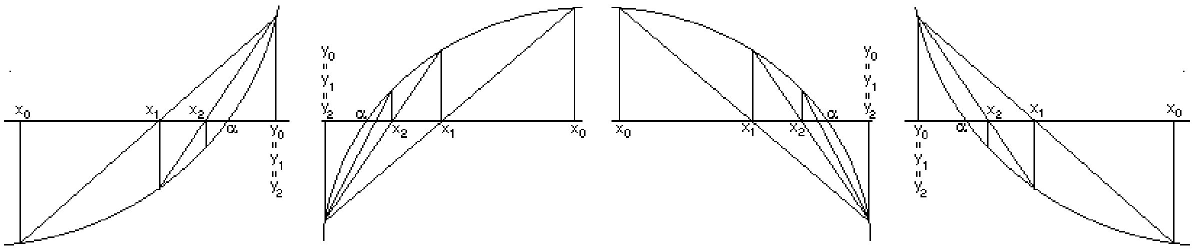
& $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$

& per a tot $x \in [x_0,i_0]$, $f''(x) \neq 0$,

llavors existeix $\eta \in [\alpha, y_0]$ tal que

$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1}-\alpha|/|x_n-\alpha| = 1/(1+2f'(\alpha)/(f''(\eta)(y_0-\alpha)))$

Activitat 9.
Problema 8: Examinar la figura adjunta per a determinar quin és, en les condicions del Teorema 16, el signe de
$f'(\alpha)/(f''(\eta)(y_0-\alpha))$



Activitat 10. Demostrar el
Teorema 17: Per a tota $f \in C^2([x_0,y_0],R)$ amb $x_0,y_0 \in R$ tals que $f(x_0)\cdot f(y_0) \neq 0$ & per a tot $x \in [x_0,y_0]$, $f''(x) \neq 0$, el mètode de Regula-Falsi té ordre de convergència 1.

Activitat 11. Aplicant el desenvolupament en sèrie de Taylor de f(x) fins al segon ordre, així com el desenvolupament en primer ordre de f '(x),
Teorema -6: Per a tot interval [a,b] de nombres reals, tota funció real contínua i derivable fins a segon ordre en aquest interval, $f \in C^2([a,b],R)$, i tot parell de nombres $\alpha,x \in [a,b]$, existeix $\xi \in [\alpha,x]$ tal que
$f'(x) = f'(\alpha) + f''(\xi)(x-\alpha)$
demostrar el
Teorema 17: Per a tot subconjunt A de R i tota $f \in C^2(A,R)$, $\alpha,x_0 \in A$, si per a tot $n \in N$,
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \in A$.
& $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$
& $f(\alpha)=0$ & $f'(\alpha) \neq 0$ (*arrel simple*)
& $f''(\alpha) \neq 0$.
llavors el mètode de Newton té ordre de convergència 2.
Què podria passar si $f''(\alpha)=0$?
Activitat 12 . Demostrar el
Teorema 18: Per a tot subconjunt A de R i tota $f \in C^2(A,R)$, $\alpha,x_0 \in A$, si per a tot $n \in N$,
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \in A$
& $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$
& $f(\alpha)=0$ & $f'(\alpha)=0$ (*arrel múltiple*)
llavors el mètode de Newton té ordre de convergència 1.
Activitat 13. Utilitzant l'expressió del desenvolupament en sèrie de Taylor fins a l'ordre m+1,
Teorema -7: Per a tot interval [a,b] de nombres reals, tota funció real contínua i derivable fins a ordre m+1 en aquest interval, $f \in C^{m+1}([a,b],R)$, i tot parell de nombres $\alpha,x \in [a,b]$, existeix $\xi \in [\alpha,x]$ tal que

f(x) = ?_i=0 ^m f^ (i) (?)(x-?)^i /i! + f^ (m+1) (?)(x-?)^m+1 /(m+1)!
i recordant que
Teorema -8: Per a tot $m \in N$, $(m+1)! = (m+1)\, m!$
demostrar el

Teorema 19: Per a tot subconjunt A de R i tota $f\in C^{m+1}(A,R)$, $\alpha, x_0 \in A$, si per a tot $n\in N$,

$x_{n+1} = x_n - m\cdot f(x_n)/f'(x_n) \in A$ (**mètode de Newton modificat**)

& $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$

& per a tot i=0,1,...m-1, $f^{(i)}(\alpha)=0$ & $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$ (*arrel de multiplicitat* m)

& $f^{(m+1)}(\alpha)\neq 0$.

llavors la successió $(x_n)_{n\in N}$ té ordre de convergència 2.

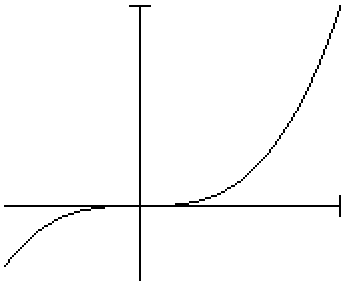
Què podria passar si $f^{(m+1)}(\alpha)=0$?

Activitat 14.

Problema 9: Aplicar el mètode de Newton (modificat si escau) a l'equació

$f(x) = x^3 = 0$, representada en la figura adjunta.

Quin podria ser el seu ordre de convergència?



Treball 3 (per a la seua realització en equip)**:**

Obtenir algebraicament les solucions de l'equació $x^2-5x+6=0$.

Aplicar el mètode de Newton para aproximar-se a una solució α a partir del valor inicial $x_0=1$ fins a arribar a una distància menor a 0'1 d'aquesta solució.

Calcular

$\lim_{x_n\to\alpha} (x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)^2$ per a comprovar que la successió generada pel mètode de Newton a partir de $x_0=1$ té ordre de convergència 2 .