Tema 1: Obtenir aproximacions successives a la solució d'un sistema d'equacions lineals Ax=b :

Objectius:

1. Trobar criteris de convergència per a una transformació $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ tal que $A(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}) = b$
    1. Trobar una condició suficient per a l'existència d'una solució única d'una equació d'iteració lineal de punt fix **x=Bx+c.**
    2. Trobar criteris de convergència per a una iteració lineal de punt fix **x=Bx+c.**
    3. Transformar un sistema d'equacions lineals **Ax=b** en una iteració lineal de punt fix **x=Bx+c** equivalent
    4. Trobar una condició suficient perquè aquesta transformació gènere una iteració lineal de punt fix convergent
2. Aproximar iterativament la solució d'un sistema d'equacions lineals **Ax=b** utilitzant com aproximació a la matriu **A** la seua matriu diagonal **D** (**mètode de Jacobi**)
    1. Obtenir la iteració lineal de punt fix equivalent al sistema **Ax=b** pel mètode de Jacobi.
    2. Trobar una condició per a la matriu **A** que garantisca que aquesta iteració lineal de punt fix siga convergent.
    3. Avaluar un sistema d'equacions lineals i adaptar-lo si escau perquè complisca la condició de convergència
3. Aproximar iterativament la solució d'un sistema d'equacions lineals **Ax=b** utilitzant com aproximació a la matriu **A** la seua matriu triangular inferior **L+D** (**mètode de Gauss-Seidel**)
    1. Trobar una expressió simplificada en funció de **L**, **D** i **U** de la matriu **B** de la iteració lineal de punt fix **x=Bx+c**, equivalent al sistema **Ax=b** amb A=L+D+U, obtinguda pel mètode de Gauss-Seidel.
    2. Trobar una expressió que ens permeta calcular successivament els diferents components del vector $\mathbf{x}^{(k+1)}$.
    3. Discutir la convergència de la iteració lineal de punt fix obtinguda pel mètode de Gauss-Seidel

Metodologia:

- Deduir enunciats lògicament, treballant en la mesura del possible en grups menuts per a exposar públicament a continuació la seua demostració.
- Resoldre problemes en grups menuts i exposar públicament a continuació la seua resolució.
- Treballar en aula d'informàtica elaborant programes per a la resolució iterativa de sistemes d'equacions lineals, executant-los per a la resolució d'un sistema determinat i avaluant la seua velocitat de convergència.

Activitats:

Activitat 1 . Definint la norma matricial associada a una norma vectorial per
Definició 4: $||A|| = \max_{x\neq 0} ||Ax||/||x||$
amb el que es compleix
Teorema 2: $||Bx|| \leq ||B||\cdot||x||$
demostrar per reducció a l'absurd que
Teorema 3: Si $||B||<1$ & $x=Bx$, llavors $x=0$.

Activitat 2 . Recordant quina és la condició necessària i suficient perquè:
a) un sistema homogeni d'equacions lineals com $x=Bx$ tinga solució única $x=0$.
b) un sistema inhomogeni d'equacions lineals com $x=Bx+c$ tinga solució única,
demostrar que
Teorema 4: Si $||B||<1$, llavors $x=Bx+c$ té solució única

Activitat 3 . Recordant que, per les propietats dels nombres naturals, haurem demostrat per inducció matemàtica que una propietat es compleix per a tot nombre natural k si es compleix per a k=0 i podem demostrar que, suposant que es compleix per a k, es complirà per a k+1, $[p_0 \ \& \ (k)\ (p_k \rightarrow p_{k+1})] \rightarrow (k)\ p_k$, demostrar que
Teorema 5: Si $x=Bx+c$ & per a tot nombre natural k, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, llavors per a tot nombre natural k, $x-x^{(k)}=B^k(x-x^{(0)})$.

Activitat 4 . Recordant que podem deduir que una successió no negativa tendirà a zero si està fitada superiorment per altra successió que tendeix a zero, demostrar que
Teorema 6: Si $||B||<1$ & per a tot nombre natural k, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, llavors existeix **x** tal que $x=Bx+c$ & $x=\lim_{k\rightarrow\infty} x^{(k)}$.

Activitat 5 . Recordant que, si $x=Bx+c$ & $x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+c$, llavors $x-x^{(k)}=B(x-x^{(k-1)})$, així com la propietat triangular
Teorema -1: $||x-x^{(k-1)}|| \leq ||x-x^{(k)}|| + ||x^{(k)}-x^{(k-1)}||$
demostrar que
Teorema 7: Si $x=Bx+c$ & $x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+c$ & $||B||<1$, llavors podem fitar l'error d'aproximació de $\mathbf{x}^{(k)}$ a **x** per $||x-x^{(k)}|| \leq ||x^{(k)}-x^{(k-1)}||\cdot||B||/(1-||B||)$.

Activitat 6 . Demostrar que, sent $I=(\delta_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ la matriu identitat (els elements de la qual valen 1 si i=j i 0 si i≠j) i A, B, C matrius n per n, es compleix que
Teorema 8: Si $B=I-C^{-1}A$ & $c=C^{-1}b$, llavors $x=Bx+c$ és equivalent a $Ax=b$.

Activitat 7 . Demostrar que, definint
Definició 5: C és una bona aproximació a A, $C\approx A$, si i només si $||I-C^{-1}A||<1$
es compleix que
Teorema 9: Si $C\approx A$ & $B=I-C^{-1}A$ & $c=C^{-1}b$ & per a tot nombre natural k, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, llavors $A(\lim_{k\rightarrow\infty} x^{(k)})=b$.

Activitat 8 . Recordant que la inversa de la matriu diagonal $D=((\delta_{ij}A_{ii})_{i,j=1\ldots n}$ és
Teorema -2: $D^{-1}=((\delta_{ij}/A_{ii})_{i,j=1\ldots n}$
que els productes matricials es calculen mitjançant $(XY)_{ij}=\sum_k X_{ik}I_{kj}$ i que $\sum_k \delta_{ik}X_k = X_i$, demostrar que
Teorema 10: Si $C=D$ & $B=I-C^{-1}A$ & $c=C^{-1}b$, llavors, per a tot i,j=1...n, $c_i=b_i/A_{ii}$ & $B_{ij} = -A_{ij}/A_{ii}$ si i≠j & Bij=0 si i=j .

Activitat 9 . Obtenir l'expressió de la iteració corresponent al mètode de Jacobi,
Teorema 11: $x^{(k+1)}_i =$

Activitat 10 . A partir de les següents definicions:

Definició 6: Direm que la matriu A és estrictament diagonalment dominant per files si i només si, per a tot
$i=1...n$, $|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |Aij|$
Definició 7: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$
i sabent que
Teorema -3: $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |Aij|$
demostrar que
Teorema 11: Si la matriu A és estrictament diagonalment dominant per files, llavors la iteració corresponent al mètode de Jacobi és convergent.
Activitat 11.
Problema 2: Aproximar la solució del sistema d'equacions
$\{10x_1+x_2+x_3=12 , x_1+10x_2+x_3=12 , x_1+x_2+10x_3=12\}$ pel mètode de Jacobi: iterar des de $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ fins que $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<0.005$; fitar l'error.
Què passaria si prenguérem el sistema d'equacions
$\{x_1+10x_2+x_3=12 , x_1+x_2+10x_3=12 , 10x_1+x_2+x_3=12\}$?
Activitat 12 . Sent $L_{ij}=A_{ij}$ si $i>j$, $L_{ij}=0$ si $i\leq j$, $U_{ij}=A_{ij}$ si $i<j$, $U_{ij}=0$ si $i\geq j$, de manera que

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ A_{ij} & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & A_{ii} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & A_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = L+D+U$$

obtenir una expressió simplificada de B en funció de L, D i U,
Teorema 12: Si $C=L+D$ & $B=I-C^{-1}A$, llavors $B=$

Activitat 13 . Recordant que $c=C^{-1}b$, obtenir l'expressió matricial de la iteració corresponent al mètode de Gauss-Seidel,
Teorema 13: $x^{(k+1)} =$

Activitat 14 . Per a evitar el càlcul, no trivial, de $(L+D)^{-1}$, aplicar $D^{-1}(L+D)$ a ambdós termes de l'expressió anterior i reescriure l'expressió resultant en la forma
Teorema 14: $x^{(k+1)} = D^{-1}(\qquad\qquad\qquad\qquad)$

Activitat 15 . Obtenir una expressió que ens permeta calcular successivament els diferents components
Teorema 15: $x^{(k+1)}_i =$

Desenvolupar aquesta expressió per al cas n=3.

Activitat 16 . Discutir les condicions de convergència del mètode de Gauss-Seidel.

Activitat 17.
Problema 3: Aproximar la solució del sistema d'equacions
$\{10x_1+x_2+x_3=12 , x_1+10x_2+x_3=12 , x_1+x_2+10x_3=12\}$ pel mètode de Gauss-Seidel: iterar des de $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ fins que $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<0.005$; comparar la seua velocitat de convergència amb la del mètode de Jacobi.

Treball 2 (per a la seua realització en equip)**:**
Aproximar la solució del sistema d'equacions {3x+y=4, x+2y=3} pel mètode de Jacobi a partir de $x^{(0)}=(1,3)$ i de $x^{(0)}=(10,0)$ fins que es complisca $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<0.05$, representant gràficament en el plànol els successius punts trobats.
Aproximar aquesta solució pel mètode de Gauss-Seidel a partir de $x^{(0)}=(1,3)$, representant gràficament en el plànol els successius punts trobats.
Aplicar el mètode de Jacobi a partir de $x^{(0)}=(1,3)$ amb el sistema escrit d'aquesta forma: {x+2y=3, 3x+y=4}, representant gràficament en el plànol els successius punts trobats.
Comparar les diferents iteracions, valorant la seua convergència.