Tema 0: Estimar els diferents tipus d'error que es produeixen en la resolució de problemes per mètodes numèrics:

Objectius:

1. Comprendre la diferència entre errors intrínsecs i instrumentals.
2. Comprendre els conceptes d'error absolut i error relatiu.
3. Entendre com tracten els ordinadors els nombres no sencers.
4. Estimar quantes xifres significatives es coneixen d'una determinada quantitat.

Metodologia:

- Debatre un text en grups menuts, posant posteriorment en comú el resultat del debat.
- Realització de tasques en grups menuts, exposant públicament a continuació les seues conclusions.

Activitats:

Activitat 1. Debatre en grups menuts el següent text, escollint prèviament un portaveu de cada grup per a exposar posteriorment les conclusions i si escau els dubtes suscitats:

*Els mètodes numèrics permeten obtindre solucions aproximades a determinats problemes. Per avaluar aquestes solucions, és important tindre una estimació de l'**error**.*

*Hi ha errors **intrínsecs** al mètode utilitzat. Normalment aquests errors es poden fer tan petits com es vulga, a través d'aproximacions successives. Tanmateix, al disposar d'un temps finit per realitzar els càlculs, hem de conformar-se amb aproximar amb un cert marge d'error. Caldrà, doncs, un compromís entre la cota d'error admesa i el temps màxim de càlcul que ens podem permetre.*

*Naturalment, seran preferibles aquells mètodes que permetan aproximar fins a una determinada cota d'error en menys temps, els quals direm que tenen una **velocitat de convergència** major. En els mètodes que aproximen iterativament a través d'una sèrie de passos successius, podem mesurar aquesta velocitat per la inversa del número de passos necessaris. Tanmateix, des del punt de vista del temps de càlcul cal valorar també la complexitat dels càlculs a realitzar en cada pas.*

*Als efectes anteriors, normalment treballarem amb l'**error absolut**, definit com el valor absolut de la diferència entre el valor exacte* $\mathbf{x}$ *i l'aproximació* $\tilde{\mathbf{x}}$,

Definició 1: $\varepsilon = | x - \tilde{\mathbf{x}}|$

Naturalment, en desconèixer el valor exacte l'únic que podrem fer és estimar l'error, donant una cota superior per al mateix.

*Hi ha també **errors instrumentals** deguts a l'instrument de càlcul utilitzat. En particular, les calculadores i ordinadors digitals treballen amb un número finit de xifres, i per tant no utilitzen números amb infinites xifres decimals, com els irracionals* *o els fraccionaris "decimals periòdics". Per exemple, aproximarien* 1/3 = 0' 3 ≈ 0'333333 *, amb un número de xifres decimals depenent de la precisió de l'instrument.*

*Per aproximar el càlcul dels números racionals i reals, els ordinadors treballen amb números decimals en **punt flotant**, tractant per separat les xifres significatives (**mantissa**) i l'ordre de magnitud (**característica**). Per exemple,* 0'00000000000000235410347= 2'35410347.10^{-14} *s'expressarà com* 2.35410347E-14.

*Per tal com la principal limitació està en el número de xifres significatives admeses, allò que ens importarà serà l'**error relatiu** del valor aproximat* $\tilde{\mathbf{x}}$ *respecte del valor exacte* **x***, definit com*

Definició 2: $\varepsilon_r = |x - \tilde{\mathbf{x}}| / |x|$

Activitat 2. Obtenir una fórmula que coneixent l'error relatiu i la mantissa ens proporcione el nombre de xifres significatives exactes que coneixem, d'acord amb la

Definició 3: Direm que $\tilde{\mathbf{x}}$=aEb (amb $1 \leq a < 10$) aproxima a x amb un nombre sencer de k xifres significatives si i només si

$$\varepsilon_r < 0'5 \cdot 10^{-k+1}/a.$$

(suggeriment: aclarir **k** en aquesta inequació i prendre la seua part sencera)

L'obtenció d'aquesta fórmula ens permetrà completar l'enunciat del següent

Teorema 1: $\tilde{\mathbf{x}}$=aEb aproximarà a x amb un nombre de xifres significatives exactes **k** igual al major nombre sencer menor que

Com podríem interpretar el cas que **k** resultarà negatiu?

Activitat 3.

Problema 1: calcular l'error absolut i relatiu en els següents casos:

a) $\tilde{\mathbf{x}}$= 2.35410347I-14 , x = 2.35410343I-14.

b) $\tilde{\mathbf{x}}$= 2.35410347I16 , x = 2.35410343I16.

Amb quantes xifres significatives aproxima $\tilde{\mathbf{x}}$a x ?

Treball 1 (per a la seua realització en equip)**:**

a) Ampliar la classificació dels errors plantejada en l'Activitat 1 a partir de la bibliografia recomanada.

b) Posar diferents exemples d'aproximació de $\tilde{\mathbf{x}}$a **x** amb diferents errors absoluts i relatius i calcular el nombre de xifres significatives amb que s'aproxima en cada cas. Avaluar de què depèn aquest nombre. Considerar algun cas que l'error relatiu siga major a 0'5 i valorar-lo.