Tema 3: Trobar una funció polinòmica que passe per un conjunt de punts:

Objectius:

1. Demostrar l'existència i unicitat del **polinomi interpolador** de grau menor o igual que **m** que passa per **m+1** punts d'abcises distintes.
2. Trobar una fórmula que ens done directament l'expressió del polinomi interpolador.
3. Trobar un mètode per a obtenir successivament punts interpolats a mesura que introduïm nous punts per a interpolar.
4. Trobar un mètode que ens done successius termes del polinomi interpolador.
5. Trobar un mètode per a interpolar coneixent les ordenades d'un conjunt de punts i algunes derivades en els mateixos.
6. Entendre els problemes de **fiabilitat** de la interpolació, especialment si es realitza fora de l'interval en el qual es tenen dades (extrapolació) o s'utilitzen polinomis d'un grau elevat.

Metodologia:

- Deduir enunciats lògicament, treballant en la mesura d'allò possible en grups menuts per a exposar a continuació públicament la seua demostració.
- Aplicar algorismes per a resoldre problemes en grups menuts, exposant a continuació públicament la seua resolució.
- Treballar en aula d'informàtica elaborant programes per a interpolació i regressió lineal, executar-los i valorar els resultats obtinguts.

Activitats:

Activitat 1 . Tenint en compte la condició necessària i suficient perquè un sistema d'equacions lineals siga determinat, el valor del *determinant de Vandermonde,*
Teorema -9: $|x_k^{\,i}| = \prod_{k>i} (x_k - x_i)$
i la
Definició 9: Direm que $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ és **un polinomi interpolador** de grau menor o igual que **m** en els punts
$\{(x_k, f_k) \,/\, k=0,1...m\}$ si i només si, per a tot $k=0,1...m$, $p(x_k)=f_k$,
demostrar el
Teorema 20: Si per a tot $i \neq k$, $x_i \neq x_k$, llavors existeix un únic polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en els punts $\{(x_k, f_k) \,/\, k=0,1...m\}$.

Activitat 2 . Tenint en compte que
$\sum_{i=0}^{m} \Xi_i = \Xi_k + \sum_{i \neq k} \Xi_i$ per a tot $k=0,1...m$, i que
$\prod_{j \neq i} \Xi_{kj} = \Xi_{kk} \cdot \prod_{j \neq i \,\&\, j \neq k} \Xi_{kj}$ per a tot $i \neq k$.
demostrar el

Teorema 21: Si per a tot $i \neq k$, $x_i \neq x_k$, llavors $p(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i \dfrac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$
és el polinomi interpolador de $\{(x_k, f_k) \,/\, k=0,1...m\}$ (**mètode de Lagrange**).

Activitat 3.
Problema 10: Donats els punts

$x_{k.}$	1.	2.	4.	5.
f_k	0.	2.	12.	21.

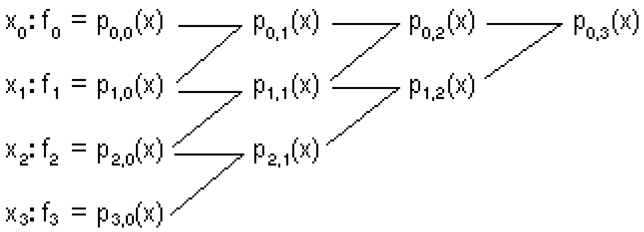
obtenir pel mètode de Lagrange la seua interpolació per a x=3.
(suggeriment: a l'aplicar la fórmula, escriure primer cada denominador per a evitar errors)

Activitat 4 . Demostrar el
Teorema 22: Si per a tot $i,j=0,1...m$, si $i \neq k$, llavors $x_i \neq x_k$,
& si $i+j \leq m$, llavors $p_{i,j}$ és el polinomi interpolador de grau menor o igual que j en $\{(x_k, f_k) \,/\, k=i,i+1...i+j\}$,
llavors per a tot $j=1...m$, $i=0,1...m-j$,

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x_{i+j} - x) p_{i,j}\text{-}1 + (x - x_i) p_{i+1,j-1.}}{x_{i+j} - x_i}$$

(suggeriment: comprovar que $p_{i,j}(x_i)=f_i$ & $p_{i,j}(x_{i+j})=f_{i+j}$ & per a tot $k=i+1...i+j-1$, $p_{i,j}(x_k)=f_k$).

Activitat 5 . Tenint en compte que, amb els $p_{i,j}$ definits en el Teorema 22,
Teorema 23: per a tot i=0,1...m & per a tot x∈R, $p_{i,0}(x) = f_i$
i
Teorema 24: $p_{0,m}$ és el polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$,
utililizar l'algorisme



(**mètode de Neville**)

per a resoldre el
Problema 11: Donats els punts

x_k	1.	2.	4.
f_k	0.	2.	12.

obtenir pel mètode de Neville la seua interpolació per a x=3 .
Afegir a continuació el punt $(x_3, f_3) = (5, 21)$ i obtenir la nova interpolació per a x=3 .
Comparar el resultat obtingut amb el del problema 10.

Activitat 6 . D'acord amb la

Definició 10: Amb $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ tal que per a tot i,j=0,1...m, si i≠k, llavors $x_i \neq x_k$, definirem les **diferències dividides** $f[x_i,x_{i+1},...x_j]$ mitjançant

$f[x_i] = f_i$ per a tot i=0,1...m

$$f[x_i,x_{i+1},x_j] = \frac{f[x_{i+1},...x_j] - f[x_i,...x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$ per a tot i=0,1...m-1 , j=i+1,...m

i calculant-les amb l'algorisme

$\mathbf{f[x_0]}$
$\quad > \mathbf{f[x_0,x_1]}$
$f[x_1] \quad > \mathbf{f[x_0,x_1,x_2]}$
$\quad > f[x_1,x_2] \quad > \mathbf{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$
$f[x_2] \quad > f[x_1,x_2,x_3]$
$\quad > f[x_2,x_3]$
$f[x_3]$

Problema 12: comprovar a partir dels punts

k.	0.	1.	2.	3.
x_k	1.	2.	4.	5.
f_k	0.	2.	12.	21.

i comparant amb els resultats obtinguts pel mètode de Neville que, per a m=0,1,2,3,
$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{f[x_0,...x_j]} \prod_{i=0}^{j-1} (x-x_i)$
és el polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$
(**mètode de Newton**)

Activitat 7 . Recordant que, d'acord amb la fórmula de Taylor
Teorema -10: $p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} [f^{(j)}(x_0) / j!] (x-x_0)^j$ és el polinomi de grau menor o igual que **m** que compleix les condicions $p_m^{(j)}(x_0)=f^{(j)}(x_0)$ per a $j=0,1...m$
així com que
Teorema -11: $\lim_{x\to x_i} (f(x)-f(x_i))/(x-x_i) = f'(x_i)$
prendrem
Definició 11: $f[x_i,x_{i+1},...x_j] = f^{(j-i)}(x_i)/(j-i)!$ si $x_i=x_{i+1}=...=x_j$ i coneixem la derivada d'ordre j-i en el punt x_i de la funció **f** a interpolar (naturalment, serà també $f_i=f_{i+1}=...=f_j$),
amb el que podrem generalitzar el mètode de Newton repetint **r** vegades el punt (x_i,f_i) si coneixem les derivades fins a l'ordre r-1 en x_i (**interpolació d'Hermite**).
Problema 13: Aplicar el mètode de Newton generalitzat a partir de les dades p(0)=1 , p'(0)=2 , p(1)=3. Comprovar que el resultat obtingut és el polinomi de grau igual o inferior a 2 que compleix aquestes condicions.

Activitat 8 . Assumint que l'error de la interpolació polinòmica de grau menor o igual que **m** ve donada per
Teorema -12: $f(x)-p_m(x) = [f^{(m+1)}(\xi(x))/(m+1)!] \prod_{i=0}^{m} (x-x_i)$ tal que $\xi(x)\in[a,b]$ tal que per a tot i=0,1...m, $x_i\in[a,b]$
Problema 14: Fitar el valor de f(3) suposant que

x_k	1.	2.	4.	5.
$f(x_k)$	0.	2.	12.	21.

i que la quarta derivada de la funció f(x) en l'interval [1,5] està entre 1 i 2 .