Tema 4. Obtenir una solució aproximada de la integral definida d'una funció, $\int_a^b f(x)dx$:

Objectius:

1. Obtenir uns pesos W_k independents de la funció f(x) tals que sumant el seu producte pels corresponents valors de la funció en determinats nodes x_k, $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$, proporcione la integral exacta per a polinomis fins a un cert grau, i una bona aproximació per a altres funcions.
2. Aprendre a fitar l'error d'aquesta aproximació expressant-lo com el producte d'un factor C independent de la funció f(x) per la derivada d'un cert ordre **r** de la funció en algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b] , $Cf^{(r)}(\xi)$.
3. Estudiar el cas de nodes equidistants, $x_k=a+kh$ (Fórmula de Newton-Cotes).
4. Aprendre a millorar l'aproximació augmentant el nombre de nodes.
5. Aprendre a millorar l'aproximació utilitzant valors de la derivada de la funció.
6. Aprendre a millorar l'aproximació escollint de forma adequada els nodes (integració gaussiana).
7. Aprendre a valorar comparativament diferents mètodes tenint en compte tant el seu màxim error d'aproximació com el seu cost de computació.

Metodologia:

- Utilitzar el mètode de coeficients indeterminats per a obtenir tant els pesos W_k com el factor C de l'error, a partir de la integral exacta de potències simples i resolent en grups menuts els corresponents sistemes d'equacions per a exposar públicament a continuació els resultats obtinguts.
- Aplicar les fórmules obtingudes per a aproximar la integral de determinades funcions treballant en grups menuts i exposant públicament a continuació els resultats obtinguts.
- Treballar en aula d'informàtica elaborant programes per a l'aproximació d'integrals per diferents mètodes, valorant i comparant els resultats obtinguts.

Activitats:

Activitat 1. Tenint en compte la
Definició 14: Sent f:[a,b]→R una funció integrable, anomenarem **integral numèrica polinòmica** de **f** en els nodes x_k tals que $a \leq x_0 < ... < x_m \leq b$ a la integral en l'interval [a,b] del polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en els punts $\{(x_k,f(x_k))\}_{k=0,1...m}$
i utilitzant l'expressió del polinomi interpolador proporcionada pel mètode de Lagrange, justificar l'existència d'uns pesos W_k independents de la funció f(x) amb els quals $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$ siga la seua integral numèrica polinòmica.

Activitat 2. Tenint en compte que una integral numèrica polinòmica en **m+1** nodes és igual a la integral exacta per a polinomis de grau menor o igual que **m**, trobar un sistema d'equacions per a l'obtenció dels pesos Wk i demostrar que si per a tot $i \neq k$, $x_{*i} \neq x_k$, aquest sistema d'equacions té solució única.

Activitat 3.
Deduir la fórmula de la integral numèrica polinòmica prenent com nodes els extrems de l'interval (**Fórmula del Trapezi**),
T=

Activitat 4.
Problema 15: Aplicar la Fórmula del Trapezi per a obtenir una aproximació a la integral de $(1+x^3)^{½}$ entre 0 i 10 (veure Figura en http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/p15.gif).

Activitat 5. Tenint en compte l'expressió de l'error de la interpolació polinòmica de grau menor o igual que **m** donada pel Teorema -12 , així com que

Teorema -13: Per a tota funció integrable f:[a,b]→R, $|\int_a b\ f(x)dx| \leq \int_a b\ |f(x)|dx$.

Teorema -14: Per a tot parell de funcions integrables f:[a,b]→R, g:[a,b]→R^+, existeix $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a b\ f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a b\ g(x)\ dx$$

demostrar el

Teorema 25: El valor absolut de l'error de la integral numèrica polinòmica en m+1 nodes pot fitar-se pel producte de dos factors, un dels quals depèn únicament dels nodes, i l'altre depèn únicament de la derivada d'ordre m+1 en algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b].

Activitat 6. Suposant que l'error d'un mètode d'integració aproximada siga de la forma

$$\varepsilon = C \cdot f^{(r)}(\xi)$$

per a algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b], deduir com utilitzar la funció $f(x)=x^r$ per a obtenir el valor de C.
NOTA: en cas d'obtenir-se C=0 pot inferir-se que el mètode és exacte per a aquesta funció, i haurà de repetir-se el procés substituint **r** per **r+1** .

Activitat 7.
Obtenir l'expressió de l'error per a la Fórmula del Trapezi,
ε_T =
Indicar per a quins polinomis serà exacta aquesta fórmula.
Activitat 8.
<u>Problema 16:</u> Fitar $\int_0^{10} (1+x^3)^{½}dx$ sabent que $|f''(x)|<1'468$ en aquest interval.

Activitat 9. Tenint en compte el
<u>Teorema -15:</u> $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'dt$
demostrar el
<u>Teorema 26:</u> En el cas de nodes equidistants $x_k=a+kh$, amb $k=0,1...m$, $h=(b-a)/m$, demostrar que els pesos per al càlcul de la corresponent integral numèrica polinòmica (pesos de **Newton-Cotes**) tenen la forma $W_k=hW'_k(m)$, on $W'_k(m)$, que són els pesos corresponents al cas $h=1$, només depenen de **k** i de **m** (però no de **a** i de **b**).
Pot utilitzar-se per a la demostració l'expressió dels pesos W_k obtinguda en l'Activitat 1, aplicant en la corresponent integral el canvi de variable $x=a+th$.

Activitat 10. Obtenir els pesos de Newton-Cotes per a $m=2$ i l'interval [0,2]. A partir dels mateixos, obtenir la fórmula general (**Fórmula de Simpson**) per a la integral numèrica polinòmica en els nodes $\{a, a+h, a+2h\} = \{a, (a+b)/2, b\}$,
S =
Activitat 11.
<u>Problema 17:</u> Aproximar mitjançant la Fórmula de Simpson $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$.

Actividad 12. Teniendo en cuenta el
Teorema -16: Para todo $f \in C^r(R\to R)$, $x \in C^1(R\to R)$,

$$\frac{d^r f}{dt^r}(x(t)) = (dx/dt)^r \frac{d^r f}{dx^r}(x)$$

Así como el Teorema -15 y el Teorema 26, demostrar el *Teorema 27*: Si la expresión del error para aproximar $\int_0^m f(t)dt$ con nodos equidistantes y $h=1$ es: $\varepsilon' = (C'\, d^r f / dt^r)(\zeta)$ para algún $\zeta \in [0,m]$, Entonces la expresión general del error para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con nodos equidistantes y $h=(b-a)/m$ será:
així com el Teorema -15 i el Teorema 26, demostrar el

$$\varepsilon' = C'\frac{d^r f}{dt^r}(\zeta) \text{ per a algun } \zeta \in [0,m],$$

llavors l'expressió general de l'error per a aproximar $\int_a^b f(x)dx$ amb nodes equidistants i $h=(b-a)/m$ serà

$$\varepsilon = C.\frac{d^r f}{dx^r}(\xi) \text{ per a algun } \xi \in [a,b] \text{ amb } C=h^{r+1}C'$$

Activitat 13. Obtenir l'expressió de l'error per a la Fórmula de Simpson per a l'interval [0,2] (amb h=1), i a partir d'ella obtenir l'expressió general de l'error per a la Fórmula de Simpson per a l'interval [a,b] (amb h=(b-a)/2),
$\varepsilon_S =$
Indicar per a quins polinomis serà exacta aquesta fórmula
Activitat 14.
<u>Problema 18:</u> Fitar l'error de la Fórmula de Simpson aplicada a $\int_{-1}^{1} e^{x^2}dx$. Valorar-lo
Activitat 15. Tenint en compte la
<u>Definició 15:</u> Sent f:[a,b]→R una funció integrable, anomenarem **integral numèrica composta** de grau **m** en els mM+1 nodes $\{a+kh\}_{k=0,1...mM}$, amb h=(b-a)/(mM), a.

$$\sum_{i=0}^{M-1} N_m(i) ,$$

on $N_m(i)$ és la fórmula de Newton-Cotes de grau **m** per a la integració numèrica polinòmica de la funció f(x) en l'interval [a+imh,a+(i+1)mh] ,
demostrar el
<u>Teorema 28:</u> Per a tota funció integrable f:[a,b]→R , la seua integral numèrica composta de grau 2 en els 2M+1 nodes $\{a+kh\}_{k=0,1...2M}$, amb h=(b-a)/(2M) (**regla de Simpson**), ve donada per

$$[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + ... + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]\, h/3.$$
$$= [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{M-1} 2f(a+2ih) + \sum_{i=0}^{M-1} 4f(s+(2i+1)h)](b-a)/(6M)$$

Activitat 16. Tenint en compte el
<u>Teorema -17:</u> Per a tota funció contínua f:[a,b]→R i tot conjunt de punts $\xi_i\in[a,b]$, i=1...n, existeix $\xi\in[a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = nf(\xi)$$

demostrar el
<u>Teorema 29:</u> Per a tota $f\in C^4([a,b],R)$, l'error de la regla de Simpson per aproximar $\int_a^b f(x)dx$ ve donat per

$$\varepsilon_{RS} = - f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(2880M^4) \text{ per a algun } \xi\in[a,b]$$

Activitat 17.
<u>Problema 19:</u> Quin increment **h** hauríem de prendre per a obtenir una aproximació a $\int_{-1}^{1} e^{x^2}dx$ amb un error menor a 0'01 mitjançant la regla de Simpson?

Activitat 18. Calcular els pesos adequats perquè $W'_0\, f(0)+W'_1\, f(1)+W'_2\, f\,'(0)+W'_3\, f\,'(1)$ ens done el valor exacte de
$\int_0^1 f(t)dt$ per a polinomis fins al tercer grau. A partir d'aquests pesos, i tenint en compte el
<u>Teorema -18:</u> Per a tot $f\in C^r(R\to R)$, $x\in C^1(R\to R)$, $df/dt = (df/dx)\cdot(dx/dt)$,
obtenir la fórmula general (**Fórmula del Trapezi Corregida**) que resulta de substituir la integral $\int_a^b f(x)dx$ per la integral del polinomi interpolador d'Hermite per al qual coincideixen els valors de la funció i de la seua primera derivada en els extrems de l'interval,
TC=

Comparar amb la fórmula obtinguda en l'Activitat 3 i justificar per què es diu Fórmula del Trapezi *Corregida*. En quin cas ambdues fórmules coincidiran?

Activitat 19. Obtenir l'expressió de l'error per a la Fórmula del Trapezi Corregida per a l'interval [0,1] (amb h=1), i a partir d'ella obtenir l'expressió general de l'error per a la Fórmula del Trapezi Corregida per a l'interval [a,b] (amb h=b-a), ε_{TC} = Indicar per a quins polinomis serà exacta aquesta fórmula

Activitat 20.
Problema 20: Fitar $\int_0^{10} (1+x^3)^{½}dx$ sabent que $|f^{(4)}(x)|<10$ en aquest interval (veure Figura en http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/p15.gif).

Activitat 21. Demostrar el
Teorema 30: Per a tota $f\in C^4([a,b],R)$,

$$[f(a)+f(b)]h/2 + [f'(a)-f'(b)]h^2/12 + h\sum_{i=1}^{M-1} f(a+ih) \quad \text{amb } h=(b-a)/M$$

(**regla del Trapezi Corregida**)

dóna una aproximació a $\int_a^b f(x)dx$ amb un error

$$\varepsilon_{RTC} = f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(720M^4) \text{ per a algun } \xi\in[a,b]$$

Activitat 22. Tenint en compte que el cost computacional del càlcul numèric aproximat d'una integral pot amidar-se pel nombre de vegades que s'avalua la funció f(x) o la seua derivada f '(x), comparar el cost computacional de la regla de Simpson i la regla del Trapezi Corregida amb el mateix valor de M. Quin seria el cost computacional de la regla de Simpson amb M=11? Per a quin valor de M la regla del Trapezi Corregida tindria el mateix cost computacional? Comparar l'estimació dels errors d'ambdues regles amb el mateix cost computacional.

Activitat 23.
Problema 21: Quin increment **h** hauríem de prendre per a obtenir una aproximació a $\int_{-1}^{1} e^{x^2}dx$ amb un error menor a 0'01 mitjançant la regla del Trapezi Corregida? Comparar el seu cost computacional amb el del Problema 19 (Activitat 17).
En quins casos serà preferible utilitzar la regla del Trapezi Corregida?

Activitat 24. Calcular els pesos W'_0 i W'_1 i el valor de **c** per als quals $W'_0 f(-c) + W'_1 f(c)$ dóna el valor exacte de
$\int_{-1}^{1} f(t)dt$ per a polinomis fins al segon grau. Comprovar que {-c, c} són les **arrels del polinomi de Legendre** de 2° grau, $P_2(t)=(3t^2-1)/2$, que compleix les condicions d'ortogonalitat
$\int_{-1}^{1} P_2(t)P_1(t)dt = 0.$
$\int_{-1}^{1} P_2(t)P_0(t)dt = 0.$
amb $P_0(t)=1$ i $P_1(t)=t$ polinomis de Legendre que compleixen al seu torn
$\int_{-1}^{1} P_1(t)P_0(t)dt = 0.$

Activitat 25. Obtenir l'expressió de l'error de la integral numèrica polinòmica de $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ en les arrels del polinomi de Legendre de 2º grau. Indicar per a quins polinomis serà exacte aquest mètode.

Activitat 26. Obtenir una fórmula general per a la integració de $\int_a^b f(x)dx$ realitzant el canvi $x=(a+b)/2 + (b-a)t/2$ i utilitzant la integral numèrica polinòmica de $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ en les arrels del polinomi de Legendre de 2º grau,
L2 =
amb un error
ε_{L2} =

Activitat 27.
Problema 22: Aproximar, utilitzant la fórmula derivada de la integració numèrica polinòmica en les arrels del polinomi de Legendre de 2º grau,
a) $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$
b) $\int_0^{10} (1+x^3)^{½}dx$
Fitar els corresponents errors.

Activitat 28. Demostrar el
Teorema 31: Per a tota $f \in C^4([a,b],R)$,

$$(h/2)\sum_{i=0}^{M-1} [f(a+(i+1/2-1/(2\cdot 3^{½}))h) + f(a+(i+1/2+1/(2\cdot 3^{½}))h)] \text{ amb } h=(b-a)/M$$

dóna una aproximació a $\int_a^b f(x)dx$ amb un error

$$\varepsilon_{RL2} = f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(4320M^4) \text{ per a algun } \xi \in [a,b]$$

Valorar per a quins valors de M pot ser preferible utilitzar aquesta fórmula.

Treball 4 (per a la seua realització en equip)**:**
Obtenir els coeficients W_0, W_1, W_2 i W_3 que fan que

$$W_0 f(a) + W_1 f(a+h) + W_2 f(a+2h) + W_3 f(b),$$

amb $h=(b-a)/3$, done el resultat exacte de la integral
$$\int_a^b f(x)dx$$
si f(x) és un polinomi de grau menor o igual que 3 (Fórmula de Newton-Cotes per a m=3). Obtenir l'expressió de l'error per a qualsevol funció analítica f(x).