Problemas de Introducción al Procesado digital de Señales. Boletín 1.

1) Se tiene la señal analógica (t en segundos)

$$x(t) = 2\,\mathrm{sen}(250\pi t) + 3\cos(125\pi t) - 4\,\mathrm{sen}(500\pi t)$$

y se muestrea con una frecuencia de 25 Hz. Determina la señal obtenida al hacer pasar la señal muestreada por un DA ideal.

2) Se quiere diseñar un sistema de audio con un SNRQ=80dB, para un equipo de CD (fm= 44.1KHz). Sabiendo que el rango dinámico es 10V, determina:
   a) Número de bits del conversor.
   b) Resolución.
   c) Bit-rate.

3) Determina cuál de las sinusoides siguientes son periódicas y calcula su período fundamental.
   a) $x(n) = \cos(0.01\pi n)$
   b) $x(n) = \mathrm{sen}(3n)$
   c) $x(n) = \cos(n/8)\cos(n\pi/8)$
   d) $x(n) = \cos(\pi n/2) - \mathrm{sen}(n\pi/8) + 3\cos(n\pi/4 + \pi/3)$

4) La señal analógica $x(t) = \mathrm{sen}(6\pi t)[1 + 2\cos(4\pi t)]$ con t en segundos se muestrea con un frecuencia de 10 Hz. Determina las frecuencias analógicas obtenidas cuando la señal muestreada se reconstruye con un DA ideal.¿Cuál es la tasa de Nyquist para esta señal ?. Cuál es la mínima frecuencia de muestreo para que no se produzca *aliasing*.

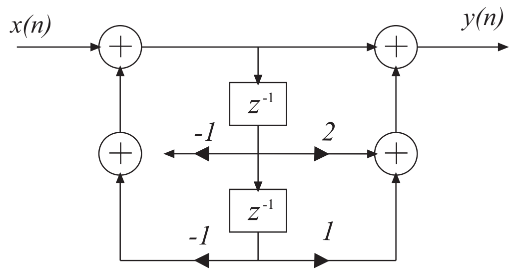
5) Para un enlace de comunicaciones digitales se transmite palabras codificadas en binario que representan muestras de la siguiente señal:

$$x(t) = 3\cos(600\pi t) + 2\cos(1800\pi t)$$

   La velocidad del enlace es de 10000bits/s y cada señal es cuantificada con 1024 niveles de tensión.
   a) ¿Cuál es la frecuencia de muestreo y la mínima que no produce ambigüedad al recuperar la señal original ?
   b) ¿Cuál es la tasa de Nyquist para esta señal?
   c) ¿Cuáles son las frecuencias de la señal resultante en tiempo discreto?
   d) ¿Cuál es la resolución Δ?

6) En el sistema de procesado de la figura siguiente los períodos de muestreo de los conversores AD y DA son T=5ms y T'=1 ms respectivamente. Determine la salida del sistema si la entrada es: $x(t) = 3\cos(100\pi t) + 2\,\mathrm{sen}(250\pi t)$, sabiendo que el post-filtro elimina cualquier componente frecuencial por encima de Fs/2 (con Fs=1/T)

7) Determina la velocidad de bit (bit-rate) y la resolución de una señal sísmica cuyo rango dinámico es de 1V si la velocidad de muestreo es Fs=20 muestras/s y se usa un conversor de 8 bits. ¿Cuál es la máxima frecuencia que aparece en la señal sísmica digital resultante?
8) Determina la respuesta impulsional de un sistema causal cuya salida es y(n)={1(n=0),-1,0,0,...} ante una entrada x(n)=u(n)
9) Determina la respuesta impulsional del siguiente sistema, para ello considéralo como 2 sistemas en cascada.



10) Determina aplicando la definición si los siguientes sistemas verifican las condiciones de linealidad, estabilidad e invarianza temporal aplicando la definición.
   a) $y(n) = \frac{x(n)+x(n-1)+x(n-2)}{3}$ $y(n) = x(n^2)$
   b) $y(n) = e^{x(n)}$
   c) $y(n) = \cos(x(n))$
   d) $y(n) = 2x(n) + 5$
11) Indica cuáles de los siguientes descritos por su ecuación en diferencias son o no causales
   a) $y(n) = x(n) + x(n-1)$
   b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$
   c) $y(n) = x(2n)$
   d) $y(n) = nx(n)$
   e) $y(n) = x(-n)$
12) Determina la respuesta impulsional de los sistemas siguientes e indica cuales son de tipo IIR y FIR:
   a) $y(n) = -0.9y(n-1) + x(n)$
   b) $y(n) = \frac{1}{3}\left(x(n) + x(n-1) + x(n-2)\right)$
   c) $y(n) = x(n) - x(n-4) + y(n-1)$
13) Determina la convolución de los sistemas siguientes
   a) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1},1,2\}$ $h(n) = \delta(n)$
   b) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1},2,-1\}$ $h(n) = u(n)$
   c) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ $h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

Soluciones del boletín 1, de problemas de Introducción al Procesado digital de Señales.

1) $x(t) = 3\cos(25\pi t)$
2)
   a) 14 bits. Se usará un conversor comercial de 16 bits.
   b) 152µV
   c) 705.6 Kbits/s
3)
   a) T=200
   b) No periódica
   c) No periódica
   d) T=16 (T=mcm(4,8,16)=16)
4)
   a) Frecuencias analógicas: 3Hz, 1Hz.
   b) Tasa Nyquist: 10 Hz
   c) Fmin>10Hz
5)
   a) Fm=1000Hz, Fmax=500Hz
   b) Tasa Nyquist:1800 Hz, (La frecuencia de plegado es de 500 Hz)
   c) f_1=0.3, f_2=-0.1
   d) Δ=9.77mV
6) La salida es nula
7)
   a) bit-rate=160 bits/s
   b) Δ=3.9mV
   c) fmax=0.5
8) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 1\}$
9) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1-1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1 \ldots\}$
10)
   a) Lineal, estable e invariante temporal (LTI)
   b) Lineal, estable, variante temporal.
   c) No lineal, estable BIBO, invariante temporal
   d) No lineal, estable BIBO, invariante temporal
   e) No lineal, estable BIBO, invariante temporal
11)
   a) Causal
   b) No causal
   c) No causal
   d) Causal
   e) No causal
12)
   a) $h(n) = (-1)^n 0.9^n u(n)$.IIR
   b) $h(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1/3}, 1/3, 1/3\right\}$ FIR
   c) $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1\}$FIR
13)
   a) $y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}$
   b) $y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 3, 2, 2, 2, 2 \ldots\}$ o bien $y(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2u(n-2)$

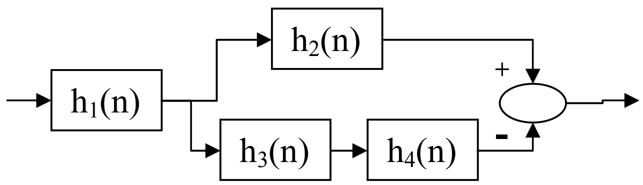
c) $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[2^{n+1} - 1\right]u(n)$

Problemas de Introducción al Procesado digital de Señales. Boletín 2.

1) Dos sistemas digitales LTI cuyas ecuaciones en diferencias se especifican a continuación se conectan en serie y en paralelo. Obtén el valor de la respuesta impulsional del sistema resultante en ambos casos

$$Sistema\,1 \quad y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$
$$Sistema\,2 \quad y(n) = 0{,}8y(n-1) + x(n)$$

2) Considera la interconexión de sistemas LTI que se muestra en la figura



a) Expresa la respuesta impulsional global en términos de $h_1(n), h_2(n), h_3(n)$ y $h_4(n)$

b) Determina h(n) cuando

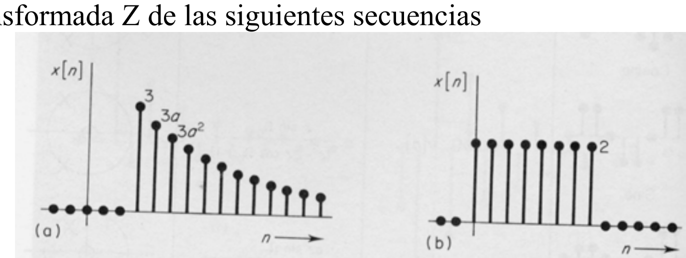
$$h_1(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1/2}, 1/4, 1/2 \right\}$$
$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$$
$$h_4(n) = \delta(n-2)$$

3) Determina la forma directa II para cada uno de los siguientes sistemas LTI

a) $2y(n) + y(n-1) - 4y(n-3) = x(n) + 3x(n-5)$

b) $y(n) = x(n) - x(n-1) + 2x(n-2) - 3x(n-4)$

4) Calcula la transformada Z de las siguientes secuencias



5) Determina la transformada Z y la región de convergencia de las secuencias siguientes.

a) $x(n) = \left\{ 3,0,0,\underset{\uparrow}{0},0,6,1,-4 \right\}$

b) $x(n) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & n \geq 5 \\ 0 & n < 5 \end{cases}$

6) Calcula la transformada Z, región de convergencia (ROC) y diagrama de polos y ceros.

a) $x(n) = (1+n)u(n)$

b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n) \quad a \in \Re$

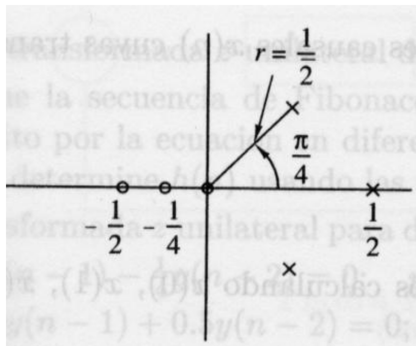
c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$

d) $x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & n\geq 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n<0\end{cases}$

7) Calcula la convolución de las secuencias:

$$x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & n\geq 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n<0\end{cases} \qquad y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

8) Dado el siguiente diagrama de polos y ceros de X(z), determina x(n) sabiendo que la constante G=1/4 y que la secuencia es causal.



9) Comprueba que los siguientes sistemas son equivalentes

a) $y(n)=0.2y(n-1)+x(n)-0.3x(n-1)+0.02x(n-2)$

b) $y(n)=x(n)-0.1x(n-1)$

10) Calcula la respuesta al escalón unidad del sistema cuya respuesta impulsional es:

a) $h(n)=\begin{cases}3^{n} & n<0\\ \left(\frac{2}{5}\right)^{n} & n\geq 0\end{cases}$

11) Dibuja el diagrama de polos y ceros de los sistemas siguientes y determina cuáles son estables

a) $y(n)=\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)+x(n)$

b) $y(n)=y(n-1)-0.5y(n-2)+x(n)+x(n-1)$

c) $y(n)=0.6y(n-1)-0.08y(n-2)+x(n)$

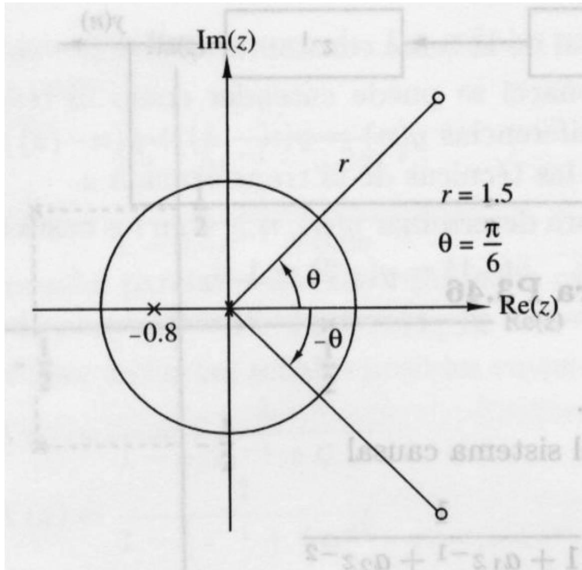
12) Queremos diseñar un sistema LTI causal, de manera que si la entrada es $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$ entonces la salida es $y(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

a) Determina h(n) y H(z) para un sistema que cumpla estas condiciones.

b) Encuentra la ecuación en diferencias del sistema.

c) Implementa dicho sistema de manera que necesite la mínima memoria posible.

13) Dado el sistema causal

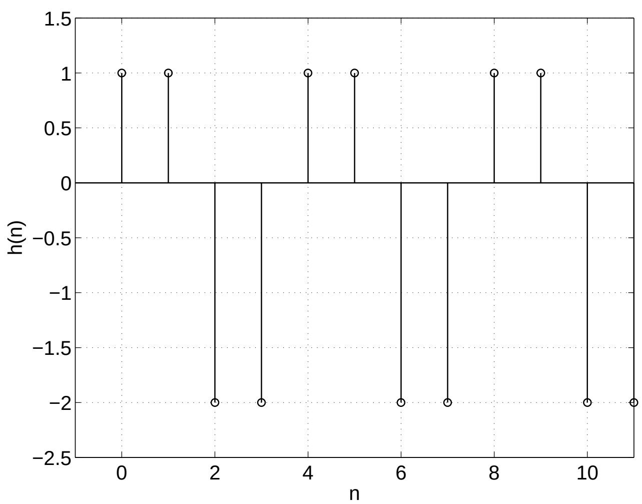


a) Calcula la función de transferencia sabiendo que $H(z)\big|_{z=1} = 1$.

b) ¿Es estable ?

c) Dibuja una posible implementación

14) Implementar con el mínimo número de retardos el sistema digital cuya respuesta impulsional es la secuencia mostrada en la gráfica.



Soluciones del Boletín 2

1)

a) Paralelo: $h(n) = 0.8^n u(n) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$

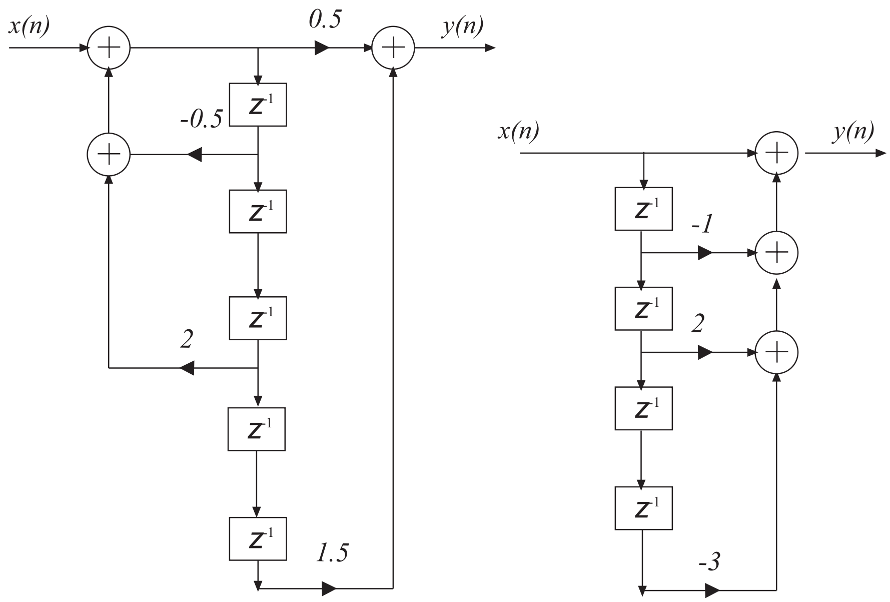
b) Serie: $h(n) = 3\cdot 0.8^{n-2} u(n-2) + 2\cdot 0.8^{n-1} u(n-1) + 0.8^n u(n)$

2)

a) $h(n) = h_1(n) * \left(h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)\right)$

b) $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3)$

3) Sistema 1 Sistema 2



4)

a) $X(z) = \dfrac{3z^{-3}}{1 - az^{-1}}$ ROC $|z| > a$

b) $X(z) = \dfrac{2(1 - z^{-8})}{1 - z^{-1}}$ ROC $|z| \neq 0$ *Hay una cancelación cero polo*

5)

a) $X(z) = 3z^3 + 6z^{-2} + z^{-3} - 4z^{-4}$ ROC Plano Z menos z = 0 y z=∞

b) $X(z) = \dfrac{z^{-5}}{2^4\left(2 - z^{-1}\right)}$ ROC $|z| > \dfrac{1}{2}$

6)

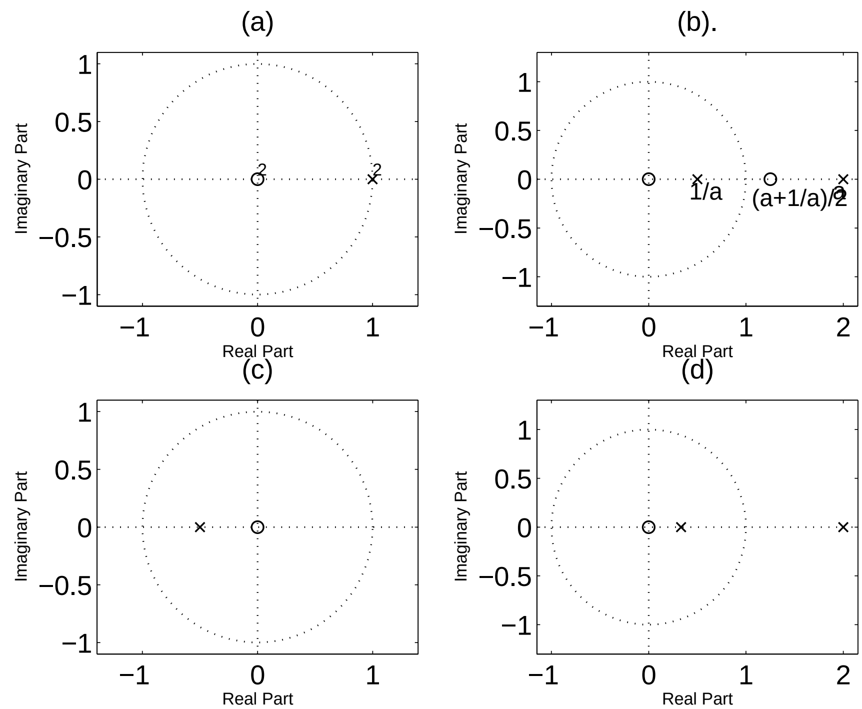
a) $X(z) = \dfrac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$ ROC $|z| > 1$

b) $X(z) = \dfrac{2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z^{-1}}{1 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z^{-1} + z^{-2}}$ ROC $|z| > max\left(|a|, \dfrac{1}{|a|}\right)$

c) $X(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$ ROC $|z| > \dfrac{1}{2}$

d) $$X(z) = \frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad \text{ROC } \frac{1}{3} < |z| < 2$$

e)



7) $$x(n) * y(n) = \begin{cases} \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ \frac{4}{3}2^n & n < 0 \end{cases}$$

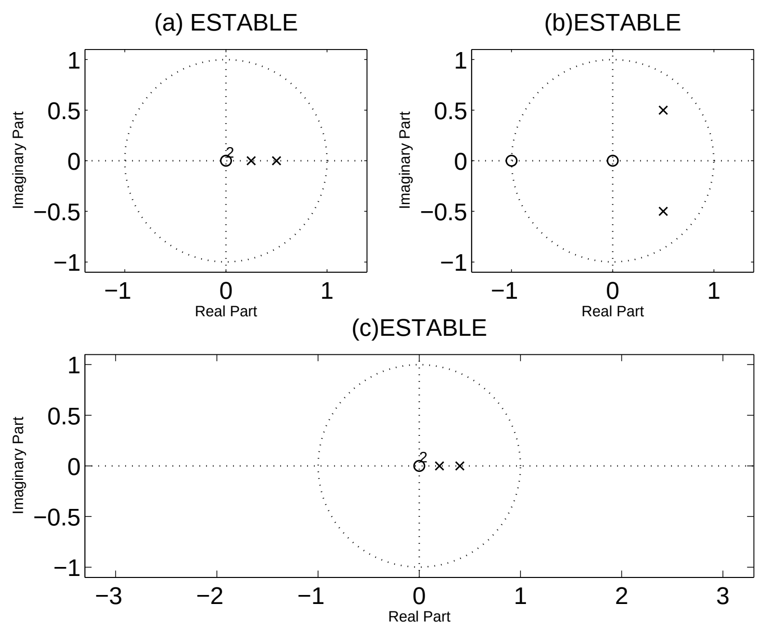
8) $$X(z) = \frac{1}{4}\frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$$

$$x(n) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{3}{2-\sqrt{2}}\ u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n 2.388 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 2.6117\right)u(n)\right]$$

9) Son equivalentes ya que hay una cancelación de un polo con un cero.

10) $$y(n) = \frac{13}{6}u(n) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n u(n) - \frac{3}{2}3^n u(-n-1)$$

11)

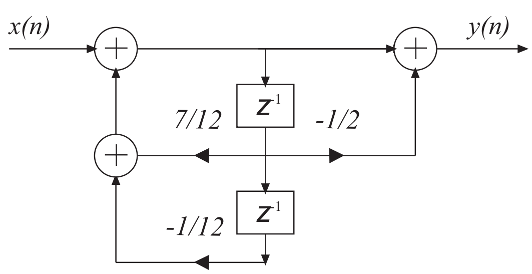


12)

a) $H(z)=\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$ $\quad h(n)=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

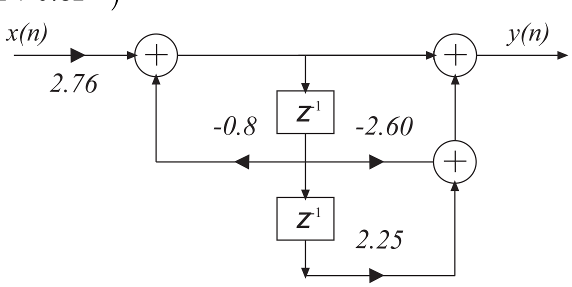
b) $y(n)=\frac{7}{12}y(n-1)-\frac{1}{12}y(n-2)+x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)$

c)



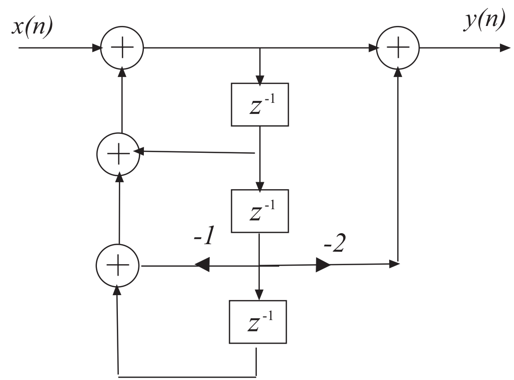
13)

a) $H(z)=2.76\dfrac{1-\frac{3\sqrt{3}}{2}z^{-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}z^{-2}}{\left(1+0.8z^{-1}\right)}$



b)

14) La función de transferencia obtenida $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}}{1-z^{-4}}$ se puede simplificar dando lugar a $H(z)=\dfrac{1-2z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}}$, de esta forma se reduce el número de retardos



15)

Problemas de Introducción al Procesado digital de Señales. Boletín 3.

1) Implementa en una estructura en paralelo el siguiente sistema digital:

$$H(z)=\frac{1-3\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}}{1-0.75\cdot z^{-1}+0.125\cdot z^{-2}}$$

2) Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias determina la correspondiente respuesta en frecuencia en magnitud y de forma aproximada:

$$y(n)=x(n)-x(n-2)+0.81\cdot y(n-2).$$

$$y(n)=x(n)-x(n-N) \text{ (N par).(considera N=2,4, 6, 8}$$

3) Se quiere diseñar un filtro digital que presenta las siguientes características:

Frecuencia de muestreo del sistema es de 1 kHz.
Presenta un cero y un polo.
Elimina la componente de continua.
Su ganancia para la frecuencia de 250 Hz es de 1.2.
El factor de ganancia G es la unidad.

Determina su ecuación en diferencias.

4) Implementa un sistema que elimine la componente de 50 Hz, la frecuencia de muestreo del sistema es de 250 Hz, alterando lo menos posible el resto de componentes. Seguidamente determina la salida en estado estacionario de dicho sistema cuanto la entrada es:

$$x(n)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+[-1]^{n}\right)\cdot u(n)$$

5) Determina la salida en estado estacionario del sistema definido por h(n) cuando la entrada es x(n):

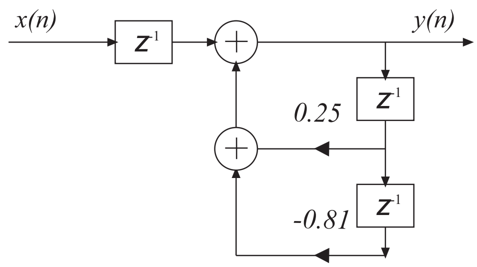
$$h(n)=\frac{1}{2}\cdot\left(0.9^{n}+(-0.9)^{n}\right)\cdot u(n)$$

$$x(n)=2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{5}\right)\cdot u(n)-sin\left(\frac{\pi\cdot n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot u(n)$$

6) Un sistema presenta la salida $y(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\cdot u(n)$ cuando la entrada es $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n)$.

Determina:
a) Ecuación en diferencias del sistema.
b) Salida en régimen estacionario del sistema cuando la entrada es $x(n)=(2+\cos(\pi\cdot n))\cdot u(n)$

7) Dado el diagrama de bloques del sistema digital causal H(z):

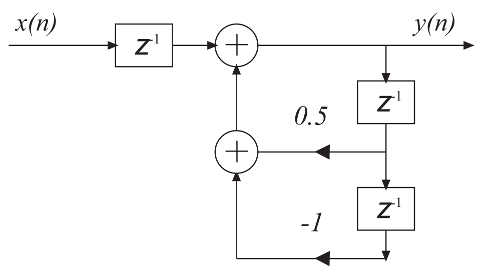


Determina:

a) Ecuación en diferencias del sistema.

b) Salida del sistema cuando la entrada es $x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n + \frac{\pi}{4}\right)$

8) Dado el diagrama de bloques del sistema digital causal H(z):

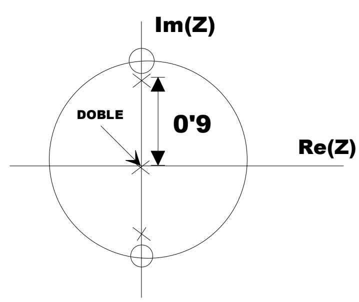


Determina:

a) Ecuación en diferencias del sistema.

b) Salida del sistema cuando la entrada es $x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)u(n)$

9) La Transformada Z de un sistema digital presenta la siguiente configuración de polos y ceros:



Determina:

a) Ecuación en diferencias del sistema

b) Respuesta en frecuencia aproximada del sistema.

10) Dado el sistema definido por la respuesta impulsional

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \delta(n)$$

a) Determina la ecuación en diferencias que define el sistema.
b) Respuesta en frecuencia en modulo y fase.
c) Determina la salida del sistema cuando la entrada es: $x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

11) Un "notch filter" se define como aquel sistema que presenta APROXIMADAMENTE la siguiente respuesta en frecuencia (en módulo)

$$|H(z)| = \begin{cases} 1 & w \neq w_0 \\ 0 & w = w_0 \end{cases}$$

Implementa el sistema de orden 2 mediante ecuación en diferencias con $w_o = \pi/2$. Comprueba el funcionamiento considerando como entrada la señal $x(n) = sin(w_a n)$ con $w_a = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$. ¿Se podría implementar con un sistema de orden 1?

12) Implementa un sistema de orden 2 mediante ecuación en diferencias que responda a las siguientes características (considera que el factor G es la unidad):
a) Elimina las frecuencias de 0 y $f_m/2$.
b) La ganancia se mantiene constante en el resto de las frecuencias.
c) La ganancia para $f_m/4$ es de 1.1

13) Calcula la salida en estado estacionario de un sistema caracterizado por la función de transferencia $H(z) = \frac{1}{z^2}$ ante una entrada $x(n) = 0.33\cos\left(\frac{3\pi}{8}n - \frac{\pi}{3}\right)$

14) Diseña un sistema causal que elimine la frecuencia de 50 Hz y tenga un resonancia a 100Hz, sabiendo que la frecuencia de muestreo es de 200Hz. ¿El número de ceros y polos de este sistema coincide ?, si la respuesta es no, asegúrate de que el sistema es realmente causal.

15) Utilizando la instrucción *residuez* de Matlab, determina la respuesta (transitorio+estacionario) de un sistema con respuesta impulsional h(n), ante una entrada x(n) definidas por las siguientes expresiones. Cuál es la salida en régimen estacionario

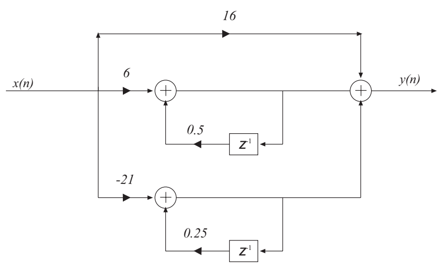
$$h(n) = \frac{1}{2}\cdot\left(0.9^n + (-0.9)^n\right)\cdot u(n)$$

$$x(n) = 2\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{5}\right)\cdot u(n)$$

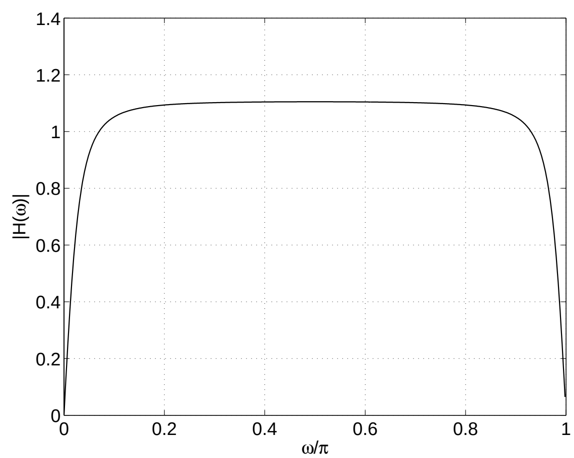
16) Repite el ejercicio 15 pero calculando únicamente la respuesta en régimen estacionario, sin realizar la inversión de la transformada Z

Soluciones:

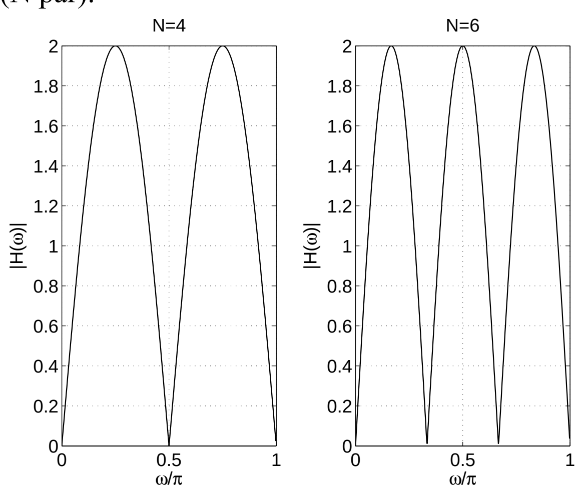
1)



2) y(n)=x(n)-x(n-2)+0.81·y(n-2).



2b) y(n)=x(n)-x(n-N) (N par).



3)Existen 2 soluciones: $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1-0.6236z^{-1}}$ ó $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1+0.6236z^{-1}}$

Las ecuaciones en diferencias serán:

$y(n)=x(n)-x(n-1)+0.6236y(n-1)$

$y(n)=x(n)-x(n-1)-0.6236y(n-1)$

4) Tomando para la distancia del polo al origen $r = 0.9$, $H(z) = \dfrac{1 - 0.6180z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.5562z^{-1} + 0.81z^{-2}}$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(1.1022 + 1.1064(-1)^n\right)u(n)$$

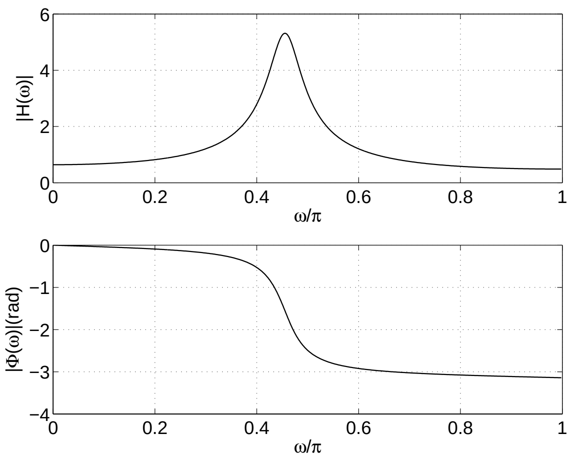
5) $y(n) = 1.1612\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}n - 0.28011\right)u(n) - 0.5525\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n + \dfrac{\pi}{4}\right)u(n)$

6) a) $y(n) = x(n) - 0.5 \cdot x(n-1) + 0.75 \cdot y(n-1)$.

b) $y(n) = \left(4 + \dfrac{6}{7} \cdot \cos(\pi \cdot n)\right)u(n)$

7) a) $y(n) = x(n-1) + 0.25 \cdot y(n-1) - 0.81y(n-2)$

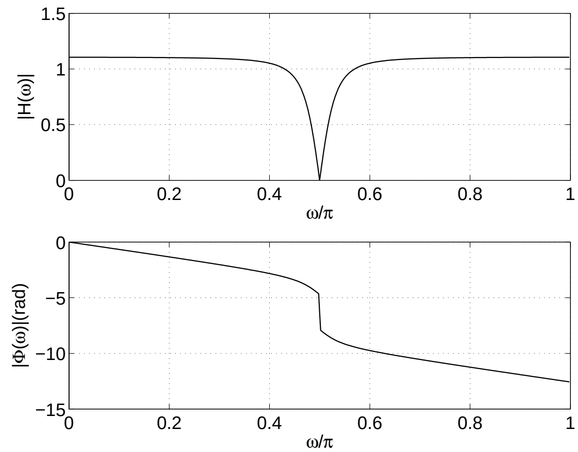
b) $y(n) = 6.3693\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot n - 1.7063\right)u(n)$

c) 

8) a) $y(n) = x(n-1) + 0.5 \cdot y(n-1) - y(n-2)$

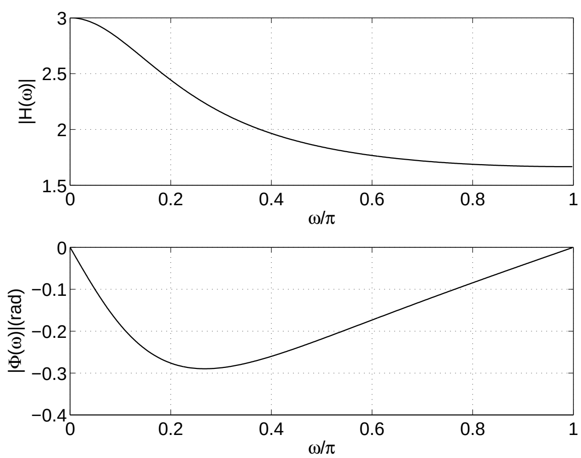
b) $y(n) = -4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)u(n) + \dfrac{16}{\sqrt{15}} \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)(n+1)\right)u(n+1)$

9) $y(n) = x(n-2) + x(n-4) - 0.81 \cdot y(n-2)$



10)

a) $y(n) = 2x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}y(n-1)$



b)

c) $y(n) = 3.6878 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n + 1.3521\right)$

11) Resuelto en Clase.

12) Resuelto en Clase.

13) $x(n) = 0.33\cos\left(\frac{3\pi}{8}(n-2) - \frac{\pi}{3}\right)$

14) $H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1+rz^{-1}}$ $r \cong 1$. El valor de r será próximo a la unidad para asegurar que se comporta como un resonador pero no igual ya que el sistema sería inestable.

15) $y(n) = 1.1159\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u(n) + 0.3209sen\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u(n) + 0.4242\cdot(0.9)^n u(n) + 0.4599\cdot(-0.9)^n u(n)$

Que también puede expresarse como:

$$y(n) = 1.1612\cos\left(\frac{2\pi}{5}n - 0.2801\right)u(n) + 0.4242\cdot(0.9)^n u(n) + 0.4599\cdot(-0.9)^n u(n)$$

16) $y(n) = 1.1612\cos\left(\frac{2\pi}{5}n - 0.2801\right)u(n)$