TEMA 2. CONVERSION AD/DA.

1. ()Se tiene un proceso industrial en el que al medir la tensión se tiene $v(t)=10\cos(200\cdot\pi\cdot t)+3\sin(1000\cdot\pi\cdot t)+15\cos(350\cdot\pi\cdot t+0.5\cdot\pi)$ voltios (t en segundos); esta señal se muestrea con un periodo de 10 milisegundos. Determina de manera analítica qué frecuencias analógicas encontraríamos si a la señal discreta le aplicamos un conversor D/A ideal.

Solución: 0 y -25 Hz.

2. ()Estamos interesados en diseñar un sistema de audio profesional (rango de la señal de entrada de 0 a 22KHz) en el que el ruido de cuantización esté, como mínimo en los 80 dB. Sabiendo que el conversor tiene un rango de escala completa de 20V determina: a) Frecuencia de muestreo mínima, b) Número de bits del conversor; c) Resolución d) *Bit-rate* (producto de la frecuencia de muestreo por el número de bits del conversor).

Solución: a) 44KHz; b) N≥14; c) 1.22 mV d) 616 Kbits/s

3. ()Al procesar de forma analógica un electrocardiograma (ECG) y determinar su espectro en magnitud nos hemos dado cuenta que éste se puede aproximar por la siguiente función continua $\left|X(j\Omega)\right|=\dfrac{1000}{1000+\Omega^2}$. Sabiendo que consideramos despreciables todas aquellas componentes frecuenciales cuyo espectro esté por debajo del 5% del valor máximo de $\left|X(j\Omega)\right|$ determina la mínima frecuencia de corte del filtro anti-alias que tengo que aplicar así como la frecuencia de muestreo mínima del sistema.

Solución: a) F_{corte}=21.9 Hz≈ 22 Hz ; b) $F_{muestreo}$≈ 44 Hz.

4. ()Dada la señal $v(t)=4+10\cos(200\cdot\pi\cdot t)\cdot\sin(1000\cdot\pi\cdot t)+5\cdot\sin(1000\cdot\pi\cdot t)$ voltios (t en segundos) determina la mínima frecuencia de muestreo que debería utilizar para evitar los problemas de aliasing. Determina las componentes frecuenciales analógicas que obtendríamos si muestreásemos a 750 Hz para, luego aplicar un conversor D/A ideal.

Solución: 0, -150, -250 y -350 Hz.

5. () Sabemos que todas las señales sinusoidales continuas son periódicas, determina la condición que se tiene que cumplir para que la señal sinusoidal digital definida por la expresión $x(n)=A\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot\dfrac{F_a}{F_m}\cdot n\right)$ sea periódica; esto es que exista un número entero N tal que cumpla x(n+N)=x(n).

Solución: La frecuencia digital debe ser un número racional;
N=denominador de la fracción irreducible.

6. (🍎🍎) Se tiene una señal analógica que tiene la siguiente expresión (aquí w toma el valor de 1000 rad/s). $y(t)=\sum_{k=1}^{10}\cos(w\cdot k\cdot t)\cdot\cos(w\cdot(k-1)\cdot t)$ determina la frecuencia mínima a la que debo muestrear (en Hertzios) para no tener problemas de *aliasing.*

Solución: $f_{muestreo} \geq$ 6.04 KHz.

7. (🍎🍎) La señal continua $x(t)=10\cdot\cos(150\cdot\pi\cdot t)$ con t es segundos, se muestrea con un periodo de muestreo T obteniendo la señal discreta $x(n)=10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n}{2}\right)$. Determina el periodo de muestreo T, ¿es único?.

Solución: a) T=(1/300) s; b) No; T=(1/300)+(k/75) con k entero.

8. (🍎🍎🍎) La transformada de Fourier de una señal x(t) viene definida por la siguiente expresión $X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot t}\cdot dt$. Demuestra que el mantenedor de orden 0 cuya función de transferencia viene definida por $h(t)=\begin{cases}\mathbf{T}\ \mathbf{0\leq t\leq T}\\ \mathbf{0\ en\ otro\ caso}\end{cases}$ tiene un comportamiento de filtro paso-bajo.

Solución: $\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|=2\cdot T\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\Omega\cdot T}{2}\right)}{\Omega}$.

9. (🍎🍎) Se tiene la señal continua definida como (t en ms): $x(t)=3+2\cdot\cos(25\cdot\pi\cdot t)\cdot sen(15\cdot\pi\cdot t)$; se quiere muestrear con la mínima frecuencia para no tener *aliasing*; además nuestro sistema tiene que presentar una SNRQ mínima de 80 dB. Sabiendo que se tiene un conversor A/D bipolar con un valor máximo de 10 v, determina: a) Frecuencia de muestreo mínima. b) Nº de bits del conversor. c) Amplitud del error de cuantización (sabiendo que se redondea no se trunca). d) Bit-rate.

Solución: a) 40KHz; b) N≥14 bits; c) 1.22 mV d) 560 Kbits/s

10. (🍎🍎) En un sistema de procesado los períodos de muestreo de los conversores ideales AD y DA son T=5ms y T'=1 ms respectivamente. Determina a) las componentes frecuenciales de la salida del sistema si la entrada es $x(t)=3\cos(100\pi t)+2\,\mathrm{sen}(250\pi t)$ con t en segundos; b) si aplicamos tras el conversor D/A un filtro paso-bajo ideal de frecuencia de corte 1/T determina dichas componentes

Solución: a) 250 y 375 Hz; b) no se tiene ninguna componente.

11. (🍎🍎) Un módem tiene una velocidad máxima de transmisión de datos de 54 kbits/s. Si se desea transmitir voz en tiempo real sin comprimir, representando cada muestra con 8 bits, ¿cuál será la frecuencia máxima de

la señal que se puede enviar si la frecuencia de muestreo es 1.1 veces la frecuencia de Nyquist

Solución: f_{maxima}=3.06 KHz.

11. () Determina si son periódicas, o no, las siguientes sinusoides digitales así como su periodo, N (en el caso de ser periódicas) a) $x(n)=3\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot n\right)$ b) $x(n)=3\cdot\cos(0.75\cdot n)$ c) $x(n)=4\cdot\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{11}n\right)$ d) $x(n)=3\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{7}\cdot n+\frac{\pi}{4}\right)$
Solución:a) y b) No Periódicas, c)Periódica N=22, d)Periódica N=14

12. () Una de las señales que más se utilizan en análisis de sistemas continuos es $x(t)=e^{-\alpha\cdot t}$ con t>0 (t en s). Sabiendo que consideramos despreciables todas aquellas componentes frecuenciales cuyo valor, en módulo, esté por debajo del 1% del valor máximo de |X(jw)| determina la mínima frecuencia de corte del filtro *anti-alias* ideal que tengo que aplicar así como la frecuencia de Nyquist de dicha señal (**ayuda**: tendrás que usar $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cdot e^{-j\cdot w\cdot t}\cdot dt$). **Solución:** $\Omega_c=100\alpha\ rad/s$, $F_{Nyquist}=100\alpha/\pi\quad Hz$

13. ()Dada la señal $v(t)=10\cos^2(200\cdot\pi\cdot t)+5\cdot\sin^2(1000\cdot\pi\cdot t)$ voltios (t en segundos) determina la mínima frecuencia de muestreo que debería utilizar para evitar los problemas de aliasing. Determina las componentes frecuenciales analógicas que obtendríamos si muestreásemos a 750 Hz para, luego, aplicar un conversor D/A ideal. **Solución:** $Fm_{mínima}$=2kHz, Frecuencia analógicas de 200Hz y 250Hz

14. () Se tiene un sistema de adquisición de datos digital que tiene cuatro canales (entradas). La velocidad de adquisición de datos máxima (sólo se usa un canal) es de 540 Kbits/s. Sabiendo que se tiene conversores A/D cuyo rango de escala completa es de 20 voltios y se desea un error de truncamiento menor que 650 μV, determina a) Nº de bits que debería tener el conversor; b) Frecuencia máxima a la entrada cuando uso los cuatro canales (frecuencia de muestreo=1.5 veces la frecuencia de Nyquist).
Solución: a) 15 bits, b) 3kHz.

15. () Se tiene la señal continua definida como (t en ms): $x(t)=3+2\cdot\cos^2(30\cdot\pi\cdot t)+sen^2(40\cdot\pi\cdot t)$; se quiere muestrear con la mínima frecuencia para no tener aliasing; además nuestro sistema tiene que presentar una SNRQ mínima de 40 dB. Sabiendo que se tiene un conversor A/D bipolar con un valor máximo de 5 v, determina: a) Frecuencia de muestreo mínima. b) Nº de bits del conversor. c) Amplitud del error de cuantización (sabiendo que se trunca). **Solución**: a) 80kHz, b) 7 bits, c)78.7mV

16. () Determina las condiciones sobre el parámetro Ω, para que la exponencial digital compleja definida como $x(n)=A\cdot e^{j\cdot(\Omega\cdot n+\theta)}$ sea periódica, esto es, que se cumpla x(n+N)=x(n) siendo N el periodo de la señal. Utiliza dicha condición para determinar si las exponenciales digitales complejas

$x_1(n) = A \cdot e^{j\cdot(0.1\cdot n+\theta)}$ y $x_2(n) = A \cdot e^{j\cdot(0.2\cdot\pi\cdot n)}$ son periódicas. **Solución:** Condición $\Omega = \frac{2\pi k}{N}\ k, N\ enteros$ **,** x_1 no periódica, x_2 periódica N=10

17. (🍎🍎) Se tiene un sistema de adquisición de datos digital. Se quiere monitorizar la temperatura de un recinto y se sabe que el rango de variación es de 0 a 45º C y que los cambios importantes se producen cada 20 s. Sabiendo que se tiene un conversor bipolar (valor máximo 10 v) y que se quiere una precisión en la medida de 0.01º C (suponemos que el sensor ya tiene esa precisión), determina: a) Número de bits del conversor b) Frecuencia de muestreo del sistema (tomaremos la frecuencia de muestreo=1.5 veces la frecuencia de Nyquist). Considera que se utiliza todo el intervalo del entrada del AD. **Solución:** a)13 bits, b) Fm=0.15Hz

18. (🍎) En una aplicación de reconocimiento de señales se necesita muestrear dicha señal para obtener los parámetros que van a definirla. Su espectro lo vamos a modelizar de la forma $|X(j\omega)| = 100 - 2\cdot\omega \quad \omega \in [0,50]rad/s$ (con ω en rad/s). Determina la frecuencia de Nyquist de la señal y la de muestreo que usaremos (en esta aplicación tomaremos frecuencia de muestreo = 1.2 veces la de Nyquist). **Solución:** a) $\omega_{Nyquist} = 100 rad/s$ **,**

19. (🍎) Se tiene un circuito en el que, al medir la intensidad, se obtiene $i(t) = 5\cdot\cos(250\cdot\pi\cdot t) + 3\cdot\sin(300\cdot\pi\cdot t) + 15\cdot\cos(400\cdot\pi\cdot t + 0.25\cdot\pi)$ mA (t en segundos); esta señal se muestrea con un periodo de 10 milisegundos. Determina de manera analítica qué frecuencias analógicas encontraríamos si a la señal discreta le aplicamos un conversor D/A ideal. **Solución:** $i(t) = 5\cdot\cos(50\cdot\pi\cdot t) + 15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad mA$

20. (🍎🍎) Se tiene una señal analógica que tiene la siguiente expresión (aquí w toma el valor de 100 rad/s). $y(t) = \sum_{k=1}^{10}\sin^2(w\cdot k\cdot t)$ determina la frecuencia mínima a la que debo muestrear correctamente (en Hertzios).
Solución: $Fm = 2000/\pi = 636.62 Hz$

21. Queremos desarrollar un sistema de procesado digital para telefonía (rango frecuencial de la señales de 300 Hz a 3 KHz). El ruido de cuantización debe estar, como mínimo, en los 60 dB. Sabiendo que el conversor A/D a usar es unipolar con una amplitud de 5 v, determina: a) Frecuencia de muestreo mínima, b) Número de bits del conversor; c) Resolución d) *Bit-rate* mínima.

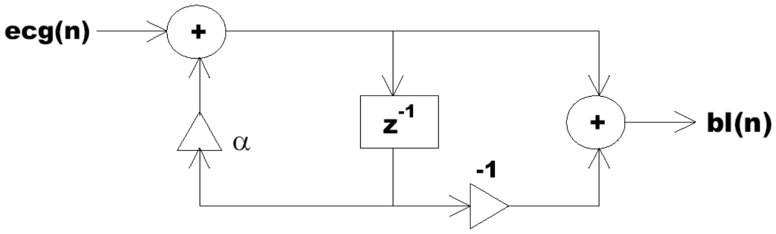
Solución: a)Fm=6kHz, lo usual es 8kHz, b)10 bits, c) $\Delta = 4.88 mV$,d)60kbits/s

TEMA 3. SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO.

1. ()Dada la secuencia definida por $x(n) = A\cos(0.1\pi \cdot n)$,
   a) Determina si es periódica, y si procede calcula su período.
   b) Calcula su energía.
   c) Calcula la potencia media en un período.

   Solución: a)Sí, N=20, b)E=∞, c) $P = A^2/2$

2. ()Dado el diagrama de bloques de la figura. Determina
   a) Ecuaciones en diferencias que permiten determinar la salida del sistema.
   b) Calcula la respuesta impulsional. (Ayuda: consideràlo como dos sistemas en cascada).
   c) Sabiendo que se trata de un sistema LTI determina bajo qué condiciones es estable BIBO



   Solución: a) $\begin{array}{l} w(n) = x(n) + \alpha\, w(n-1) \\ y(n) = w(n) - w(n-1) \end{array}$ b) $h(n) = \alpha^n u(n) - \alpha^{n-1}u(n-1)$, c) $|\alpha| < 1$

3. ()Determina la respuesta impulsional del sistema resultante de la siguiente interconexión a partir de las respuestas impulsionales de cada uno de los bloques

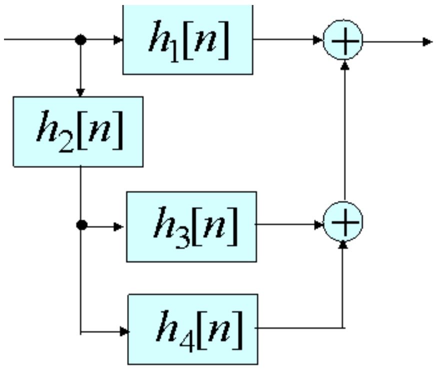
$h_1[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$

$h_2[n] = 0.5\delta[n] - 0.25\delta[n-1]$

$h_3[n] = 2\delta[n]$

$h_4[n] = -2(0.5)^n u[n]$

Solución: $h(n) = \delta(n)$.



4. ()Se define la correlación cruzada de dos secuencias periódicas de periodo N como $r_{xy}[\ell] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n-\ell], \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   Comprueba que la correlación cruzada de dos secuencias periódicas es una secuencia periódica del mismo período

5. ()Un sistema discreto LTI causal está definido por la ecuación en diferencias $y(n) = a \cdot y(n-1) + b \cdot x(n)$. Determina para qué valores de los parámetros a y b el sistema es estable.

Solución: $|a| < 1, \quad |b| \neq \infty$,

6. (●)Determina si el sistema definido por la ecuación en diferencias $y(n) = x(n) + 1$ es LTI. ¿Es un sistema estable BIBO?

Solución: No LTI , Sí estable BIBO

7. (●●)Dos sistemas digitales LTI causales cuyas ecuaciones en diferencias se especifican a continuación se conectan en serie y en paralelo. Obtén el valor de la respuesta impulsional del sistema resultante en ambos casos

$$Sistema\,1 \quad y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$
$$Sistema\,2 \quad y(n) = 0{,}8y(n-1) + x(n)$$

Solución:

Paralelo: $h(n) = 0.8^n u(n) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$

Serie: $h(n) = 0.8^n u(n) +)2 \cdot 0.8^{n-1} u(n-1) + 3 \cdot 0.8^{n-2} u(n-2)$

8. (●●) Dado el sistema definido por la ecuación en diferencias $y(n) = \frac{1}{2} \cdot y(n-1) + 3 \cdot x(n)$. Determina: a) ¿Es un sistema L.T.I?. b) La respuesta impulsional de dicho sistema. c) La salida del sistema si la entrada es $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$ d) ¿Es estable BIBO?

Solución: a) Es L.T.I; **b)** $h(n) = \left(\frac{3}{2^n}\right) \cdot u(n)$

c) $h(n) = \left(\frac{3}{2^n}\right) \cdot (n+1) \cdot u(n)$ **d)** El sistema es estable BIBO

9. (●) Demuestra que si la entrada de un sistema discreto L.T.I es periódica la salida también es periódica y, además, los periodos de las señales de entrada y salida coinciden.

10. Determina la convolución de los siguientes pares de señales;

a) (●●●) $x(n) = 2^{-|n|} \Leftrightarrow h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$

b) (●) $y(n) = [1(n=0),0,1,0] \quad x(n) = [-1(n=0),1,-1]$

Solución: a) $y(n) = x(n) * h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(n + \frac{4}{3}\right) u(n-1) + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot 2^n \cdot u(-n)$

b) $z(n) = x(n) * y(n) = [-1(n=0),1,-2,1,-1]$

11. (🍎🍎) Se un sistema discreto definido por la siguiente ecuación en diferencias $y(n) = n \cdot (x(n) - x(n-1)) - a \cdot y(n-1)$ cumpliéndose que $|a|<1$. Determina: a) La linealidad e invarianza temporal del sistema, b) su respuesta impulsional, c) la salida de dicho sistema cuando la entrada es el escalón unitario.

Solución: a) Es lineal pero no invariante temporal;
b) $h(n) = -(-a)^{n-1} \cdot u(n-1)$
c) y(n)=0 para todo n.

12. (🍎) Calcula la energía y la potencia (*no la potencia media*) de las señales $x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot u(n) \Leftrightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N} \delta(n-k) \Leftrightarrow z(n) = \left(\frac{j}{2}\right)^n \cdot u(n)$.

Solución: $E_{X(n)} = \frac{36}{35}; E_{y(n)} = N+1;\ E_{z(n)} = \frac{4}{3}$
$P_{X(n)} = P_{z(n)} = P_{y(n)} = 0$

13. (🍎🍎) Se tiene un sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias $y(n) = \frac{1}{3} \cdot [x(n) - x(n-1)] + \frac{1}{4} \cdot y(n-1)$. Determina. a) Respuesta impulsional de dicho sistema. b) ¿Es un sistema L.T.I?. c) Determina la estabilidad/causalidad de dicho sistema. d) Determina la salida del sistema cuando la entrada es x(n)=u(n).

Solución: a) $h(n) = \frac{1}{3} \cdot \delta(n) - \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n-1)$; b) Es L.T.I;

c) Es estable y causal. d) $y(n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$

14. (🍎🍎) Determina la convolución entre las siguientes dos secuencias: $h(n) = 2^n \cdot u(-n)$ y $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$:

Solución: $y(n) = \frac{4}{3} \cdot 2^{-|n|}$

15. (🍎) Determina la salida del sistema compuesto por la *conexión en cascada* de dos sistemas cuyas respuestas impulsionales vienen dadas por las siguientes expresiones $h_1(n) = \{1\ (n=0), 0, -1,\}$ y $h_2(n) = \{-1\ (n=0), 0, 1,\}$ cuando la entrada es el escalón unitario:

Solución $y(n) = -\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$

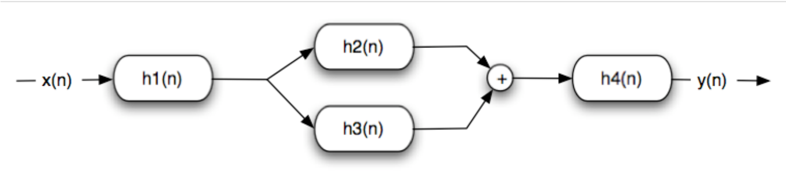
16. (🍎🍎🍎) Determina la correlación cruzada entre las señales x(n) e y(n) siendo $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot u(n)\Leftrightarrow y(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot u(n)$

$$\textbf{\textit{Solución:}}\ R_{XY}(n)=\frac{8}{7}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^l\cdot u(l-1)+4^l\cdot u(-l)\right]$$

17. (🍎) Determina la respuesta impulsional del sistema equivalente al mostrado en la siguiente figura, con

$$h_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot u(n), h_2(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\cdot\delta(n-1)-\frac{1}{4}\cdot\delta(n-2)-\frac{1}{8}\cdot\delta(n-3)$$

$$h_4(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot u(n)\ \text{y}\ h_3(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\cdot\delta(n-1)-\frac{1}{4}\cdot\delta(n-2)+\frac{1}{8}\cdot\delta(n-3)$$



$$\textbf{\textit{Solución:}}\ h(n)=2\cdot\delta(n)$$

18. (🍎🍎🍎) Se tiene un sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias $y(n)=\frac{1}{2\cdot L+1}\cdot\sum_{k=-L}^{L}x(n-k)$. Determina. a) Respuesta impulsional de dicho sistema. b) ¿Es un sistema L.T.I?. c) Determina la estabilidad/causalidad de dicho sistema.

Solución: a) $h(n)=\frac{1}{2\cdot L+1}\cdot[u(n+L)-u(n-L-1)]$;
b) Es L.T.I. c) Es estable y causal.

19. (🍎🍎🍎) Dada la señal $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u(n)$ determina su autocorrelación

$$\textbf{\textit{Solución:}}\ r_{xx}(n)=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|-2}$$

20. (🍎🍎) Se tiene el sistema definido por la ecuación en diferencias $y(n)=x(n+2)+a\cdot y(n-1)$; a)¿Es un sistema L.T.I?; ¿Es causal?; ¿F.I.R o I.I.R?, b) Determina las condiciones sobre a para que el sistema sea estable BIBO; c)Determina la salida si la entrada es el escalón unitario.

Solución: a) L.T.I, no causal, I.I.R (a≠0) ; b) es estable si | a | <1.

c) $y(n)=\left[\frac{1-a^{n+3}}{1-a}\right]\cdot u(n+2)$

TEMA 4. LA TRANSFORMADA Z

1. **( ).** Determina la secuencia temporal que tiene la transformada Z

$$H(z)=\frac{1}{1-0.25\cdot z^{-2}} \Leftrightarrow R.O.C: 0.5<|z|$$

Solución: $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\left[1+(-1)^n\right]\cdot u(n)$

2. **( ).** Determina, usando Transformadas Z, la salida del sistema definido por la respuesta impulsional $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n)$ cuando la entrada es $x(n)=(0.25)^n\cdot u(n)$

Solución: $y(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]\cdot u(n)$

3. **( ).** Se tiene un sistema que ante la entrada escalón unitario la salida es $y(n)=(0.1)^n\cdot u(n)$. Determina la respuesta impulsional del sistema.

Solución: $h(n)=\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\cdot u(n)-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\cdot u(n-1)$.

4. **( ).** Dado el sistema digital causal L.T.I definido por el siguiente par de ecuaciones acopladas $\begin{array}{l} w(n)=x(n)+0.3\cdot w(n-1)-0.02\cdot w(n-2) \\ y(n)=w(n)+2\cdot w(n-1)\end{array}$. Determina su respuesta impulsional.

Solución: $h(n)=\left[22\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n}-21\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\right]\cdot u(n)$

5. **( ).** Determina la transformada Z y R.O.C de la siguientes señales discretas: a) $y(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot sen\left(\frac{\pi\cdot n}{2}\right)\cdot u(n)$ b) $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

Solución: a) $Y(z)=\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{16}\cdot z^{-2}} \Leftrightarrow R.O.C: 0.25<|z|$

b) $H(z)=\frac{-1.5\cdot z^{-1}}{1-2.5\cdot z^{-1}+z^{-2}} \Leftrightarrow R.O.C: 0.5<|z|<2$

6. **( ).** Determina la secuencia temporal que tiene la siguiente transformada Z y R.O.C correspondiente.

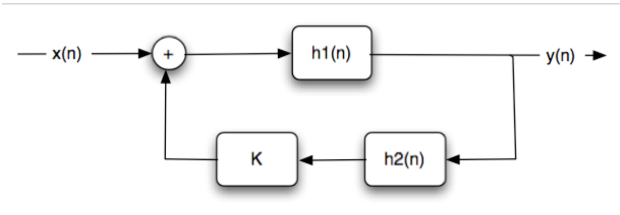
$$H(z)=\frac{1+4\cdot z^{-1}}{1+5\cdot z^{-1}+6\cdot z^{-2}} \Leftrightarrow R.O.C: 2<|z|<3$$

Solución: $h(n)=\left[2\cdot(-2)^n\cdot u(n)+(-3)^n\cdot u(-n-1)\right]$

7. **().** Se tiene un sistema digital L.T.I, causal, estable definido por $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}-2\cdot z^{-2}-z^{-4}}{1-2\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}+z^{-3}+z^{-10}}$; como entrada se tiene $x(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot u(n)$; determina el valor de y(1). Considera condiciones iniciales nulas.

Solución: $y(1)=\dfrac{7}{2}$

8. **().** Dado el siguiente diagrama de bloques determina la función de transferencia entre la entrada y la salida. Determina además los valores de k para los cuales el sistema ***total*** es estable. Aquí, $H_1(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\ H_2(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$



Solución: $\dfrac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\dfrac{z^{-1}-z^{-2}}{1-(1+k)\cdot z^{-2}}$; -2<k<0.

9. (). Calcula la transformada Z, R.O.C y los polos (z_p) y ceros (z_c) de:

$$\text{a) } x(n)=\left[a^n+(-a)^n\right]\cdot u(n) \quad \text{b) } y(n)=(-1)^n\cdot 2^{-n}\cdot u(n)$$

$$\text{c) } c(n)=(0.5)^n\cdot u(n-1)+(3)^n\cdot u(-n)$$

Solución: a) $X(z)=\dfrac{2}{1-a^2\cdot z^{-2}};R.O.C\ |z|>|a|;\ z_c=0(doble);\ z_p=\pm a$

b) $Y(z)=\dfrac{1}{1+0.5\cdot z^{-1}};R.O.C\ |z|>|0.5|;\ z_c=0;\ z_p=-0.5$

c) $C(z)=\dfrac{-5\cdot z^{-1}}{2-7\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}};R.O.C\ 0.5<|z|<3;\ z_c=0;\ z_p=3,\ 0.5$

10. ().Determina el sistema LTI causal tal que, si la entrada es $x(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$ entonces la salida es $y(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$.
    (1) Determina h(n) y H(z) para un sistema que cumpla estas condiciones.
    (2) Encuentra la ecuación en diferencias del sistema.

Solución: 1) $h(n)=\left[3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\cdot u(n)$; $H(z)=\frac{1-0.5\cdot z^{-1}}{\left(1-0.25\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot z^{-1}\right)}$

2) $y(n)=x(n)-\frac{1}{2}\cdot x(n-1)+\frac{7}{12}\cdot y(n-1)-\frac{1}{12}\cdot y(n-2)$

11. **(🍎🍎).** Determina la secuencia temporal que tiene la transformada Z

$$H(z)=\frac{1}{1-0.25\cdot z^{-2}}\Leftrightarrow R.O.C:0.5<|z|$$

Solución: $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\left[1+(-1)^n\right]\cdot u(n)$

12. (🍎). Determina, usando Transformadas Z, la salida del sistema definido por la respuesta impulsional $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot u(n)$ cuando la entrada es $x(n)=(0.25)^n\cdot u(n)$

Solución: $y(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\cdot u(n)$

13. (🍎). Se tiene un sistema que ante la entrada escalón unitario la salida es $y(n)=(0.1)^n\cdot u(n)$. Determina la respuesta impulsional del sistema.

Solución: $h(n)=\left(\frac{1}{10}\right)^n\cdot u(n)-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\cdot u(n-1)$.

14. **(🍎🍎).** Dado el sistema digital causal L.T.I definido por el siguiente par de ecuaciones acopladas $\begin{array}{l} w(n)=x(n)+0.3\cdot w(n-1)-0.02\cdot w(n-2) \\ y(n)=w(n)+2\cdot w(n-1)\end{array}$. Determina su respuesta impulsional.

Solución: $h(n)=\left[22\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n-21\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]\cdot u(n)$

15. **(🍎🍎).** Determina la transformada Z y R.O.C de la siguientes señales discretas: a) $y(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot sen\left(\frac{\pi\cdot n}{2}\right)\cdot u(n)$ b) $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

Solución: a) $Y(z)=\frac{1}{4}\cdot\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{16}\cdot z^{-2}}\Leftrightarrow R.O.C:0.25<|z|$

b) $H(z)=\frac{-1.5\cdot z^{-1}}{1-2.5\cdot z^{-1}+z^{-2}}\Leftrightarrow R.O.C:0.5<|z|<2$

16. **(🍎🍎).** Determina la secuencia temporal que tiene la siguiente transformada Z y R.O.C correspondiente.

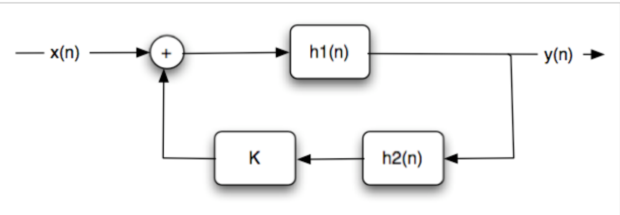
$$H(z)=\frac{1+4\cdot z^{-1}}{1+5\cdot z^{-1}+6\cdot z^{-2}} \Leftrightarrow R.O.C: 2<|z|<3$$

Solución: $h(n)=\left[2\cdot(-2)^n\cdot u(n)+(-3)^n\cdot u(-n-1)\right]$

17. **().** Se tiene un sistema digital L.T.I, causal, estable definido por $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}-2\cdot z^{-2}-z^{-4}}{1-2\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}+z^{-3}+z^{-10}}$; como entrada se tiene $x(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot u(n)$; determina el valor de y(1). Considera condiciones iniciales nulas.

Solución: $y(1)=\dfrac{7}{2}$

18. **().** Dado el siguiente diagrama de bloques determina la función de transferencia entre la entrada y la salida. Determina además los valores de k para los cuales el sistema ***total*** es estable. Aquí, $H_1(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+z^{-1}}$ $H_2(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$



Solución: $\dfrac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\dfrac{z^{-1}-z^{-2}}{1-(1+k)\cdot z^{-2}}$; -2<k<0.

19. (). Calcula la transformada Z, R.O.C y los polos (z_p) y ceros (z_c) de:

$$\text{a) } x(n)=\left[a^n+(-a)^n\right]\cdot u(n) \quad \text{b) } y(n)=(-1)^n\cdot 2^{-n}\cdot u(n)$$

$$\text{c) } c(n)=(0.5)^n\cdot u(n-1)+(3)^n\cdot u(-n)$$

Solución: a) $X(z)=\dfrac{2}{1-a^2\cdot z^{-2}}; R.O.C\ |z|>|a|;\ z_c=0(doble);\ z_p=\pm a$

b) $Y(z)=\dfrac{1}{1+0.5\cdot z^{-1}}; R.O.C\ |z|>|0.5|;\ z_c=0;\ z_p=-0.5$

c) $C(z)=\dfrac{-5\cdot z^{-1}}{2-7\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}}; R.O.C\ 0.5<|z|<3;\ z_c=0;\ z_p=3,\ 0.5$

20. ().Determina el sistema LTI causal tal que, si la entrada es $x(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$ entonces la salida es $y(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$.

(3) Determina h(n) y H(z) para un sistema que cumpla estas condiciones.

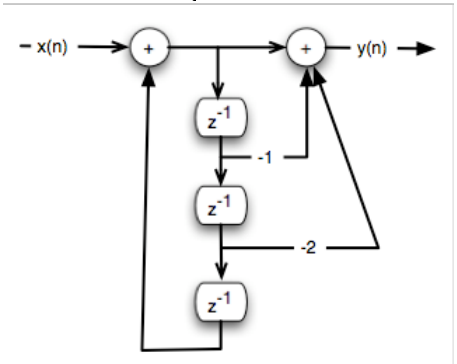
(4) Encuentra la ecuación en diferencias del sistema.

Solución: 1) $h(n)=\left[3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\cdot u(n)$; $H(z)=\dfrac{1-0.5\cdot z^{-1}}{\left(1-0.25\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot z^{-1}\right)}$

2) $y(n)=x(n)-\frac{1}{2}\cdot x(n-1)+\frac{7}{12}\cdot y(n-1)-\frac{1}{12}\cdot y(n-2)$

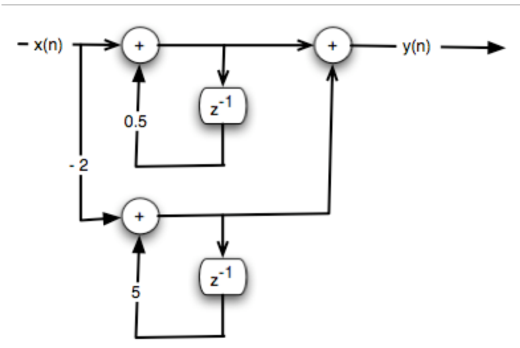
TEMA 5. ESTRUCTRURAS DE SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO.

1. **().** Implementa mediante una estructura canónica el sistema que tiene como respuesta impulsional $h(n) = \{1(n=0), -1, -2, 1, -1, -2, 1, -1, -2, ...\}$

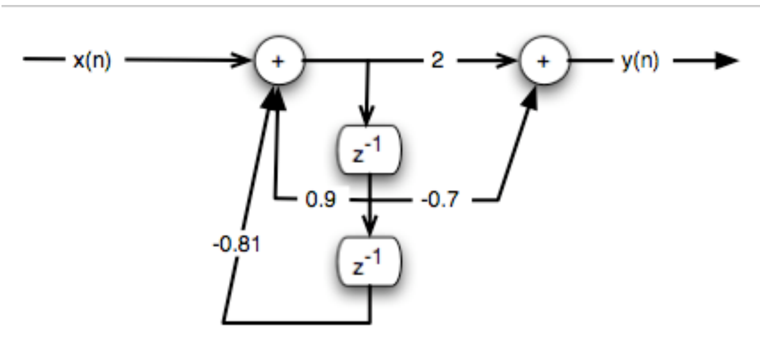


2. **()**. Determina la estructura en paralelo del sistema definido por la siguiente respuesta impulsional $h(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\cdot(5)^n\right]\cdot u(n)$. ¿Es el sistema estable?, ¿causal?.

Es causal e inestable.

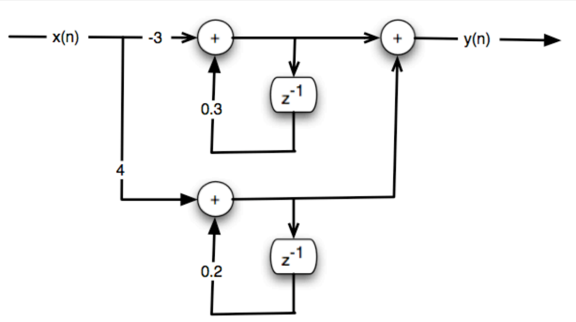


3. **()**. Dada la siguiente estructura de un sistema digital causal determina la respuesta impulsional de dicho sistema.

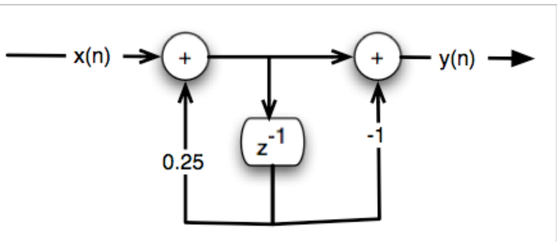


Solución: $h(n) = 2\cdot(0.9)^n\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi\cdot n}{3}\right) + \frac{2}{9\cdot\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n}{3}\right)\right]\cdot u(n)$.

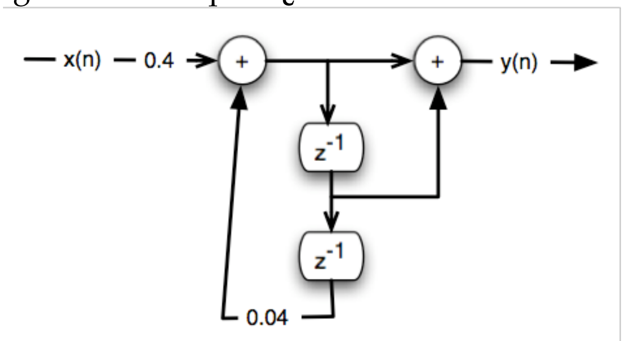
4. **().** Dado el sistema digital causal L.T.I definido por el siguiente par de ecuaciones acopladas $\begin{array}{l} w(n) = x(n) + 0.5\cdot w(n-1) - 0.06\cdot w(n-2) \\ y(n) = w(n) - 0.6\cdot w(n-1) \end{array}$. Determina su implementación en una estructura en paralelo.



5. **().** Implementa, usando el menor número de retardos, el sistema discreto, causal L.T.I que, ante la entrada escalón proporciona como salida $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$

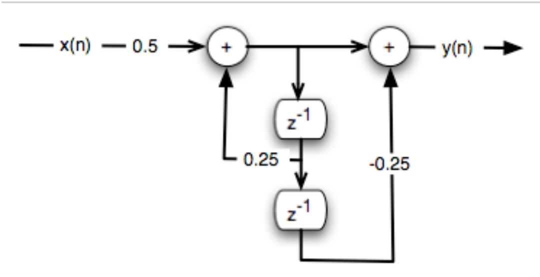


6. **()**. Determina la respuesta impulsional del sistema definido por el siguiente diagrama de bloques. ¿Es estable?.



Solución: $h(n) = (0.2)^n \left[1.2 + 0.8\cdot(-1)^{n+1}\right]\cdot u(n)$

7. **().** Un sistema L.T.I causal digital proporciona la salida y(n) cuando la entrada es x(n) siendo $x(n) = (0.5)^n\left[1 + (-1)^n\right]\cdot u(n)$ e $y(n) = (0.25)^n \cdot u(n)$. Determina su implementación con el menor número de retardos.


x(n)
0.5
+
+
y(n)
z-1
0.25
-0.25
z-1

TEMA 6. ANÁLISIS DE FOURIER PARA SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

1. (🍎🍎) Determina una posible ecuación en diferencias de un sistema digital que presente las siguientes características frecuenciales (frecuencia de muestreo igual a 250 Hz):
   - Elimina la componente de continua y 50Hz.
   - La ganancia en el resto de componentes es cercana a la unidad.

Solución:

$$y(n) = x(n) - 1.61\cdot x(n-1) + 1.61\cdot x(n-2) - x(n-3) + 1.45\cdot y(n-1) - 1.31\cdot y(n-2) + 0.72\cdot y(n-3)$$

2. (🍎) Determina la salida en *el estado estacionario* del sistema definido por la ecuación en diferencias $y(n) = x(n) + 0.85\cdot y(n-1)$ cuando la entrada es $x(n) = \left[3 + 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right) + (-1)^n\right]\cdot u(n)$.

Solución: $y(n) = \left[20 + 0.54\cdot(-1)^n + 2.77\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n - 0.98\right)\right]u(n)$

3. (🍎🍎🍎) Determina la salida, en el estado estacionario, del sistema definido por la ecuación en diferencias siguiente $y(n) = \sum_{k=0}^{n}(0.9)^{n-k}\cdot[x(k) - x(k-1)]$ cuando la entrada es la señal $x(n) = 3\cdot\cos\left(0.5\cdot\pi\cdot n + \frac{\pi}{3}\right)\cdot u(n)$ (AYUDA: calcula y(n) en función de y(n-1) para determinar la ecuación en diferencias simplificada)

Solución: $y(n) = 3.15\cdot\cos\left(0.5\cdot\pi\cdot n + \frac{\pi}{3} + 0.05\right)u(n)$

4. Determina una posible ecuación en diferencias de un sistema digital (frecuencia de muestreo de 1000 Hz) que tiene que eliminar el ruido inducido por las vibraciones mecánicas de una máquina; como el sistema mecánico es no lineal las interferencias aparecen en 100 Hz y sus correspondientes múltiplos. Considera las siguientes situaciones:

   a. (🍎🍎) El ruido hay que eliminarlo y el resto de componentes frecuenciales no importan AYUDA: (Recuerda la posición de polos/ceros de un promediador).
   b. (🍎🍎🍎) Interesa la mínima distorsión del filtro sobre dichas componentes frecuenciales. AYUDA: (Usa el resultado anterior y coloca polos cercanos a los ceros).

Solución: a) $y(n) = x(n) - x(n-10) + y(n-1)$

b) $y(n) = x(n) - 0.9 \cdot x(n-1) - x(n-10) + 0.9 \cdot x(n-11) + y(n-1) + (0.9)^{10} \cdot y(n-10) - (0.9)^{10} \cdot y(n-11)$

5. (●●) Se tienen dos sistemas en cascada que tienen las respuestas impulsionales; $h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$; $g(n) = \{-0.25\ (n=0),\ 1, 0, \ldots\}$. Determina la salida del sistema total, en estado estacionario, cuando la entrada es $x(n) = \left[5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n - \frac{\pi}{4}\right) + (-1)^n\right] \cdot u(n)$.

Solución: $y(n) = \left[5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n - \frac{\pi}{4} - 2\right) + (-1)^{n+1}\right] u(n)$

6. (●●) Determina la respuesta impulsional del sistema que presenta la siguiente respuesta en frecuencia; ¿es realizable?

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & |w| \geq w_c \\ 0 & |w| < w_c \end{cases}$$

Solución: $h(n) = \begin{cases} -\dfrac{sen(w_c \cdot n)}{\pi \cdot n} & n \neq 0 \\ \dfrac{\pi - w_c}{\pi} & n = 0 \end{cases}$

No realizable

7. (●●) Se tiene el sistema definido por la ecuación en diferencias $y(n) = x(n+2) + 0.9 \cdot y(n-1)$; determina la salida del sistema total, en estado estacionario, cuando la entrada es $x(n) = \left[2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) + 5 \cdot (-1)^n\right] \cdot u(n)$

Solución: $y(n) = \left[2.72 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n + 0.52\right) + 2.63 \cdot (-1)^n\right] u(n)$

8. (●●) Se tiene un sistema para el cual dada la entrada $x(n) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] \cdot u(n)$ se obtiene la salida $y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \cdot u(n)$ Determina la salida, en estado estacionario, cuando la entrada es $x(n) = \left[3 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)\right] \cdot u(n)$

Solución: $y(n) = \left[5.63 + 4.75 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{2} - 0.46\right)\right] u(n)$

9. (●●) Determina la frecuencia de corte de los sistemas digitales definidos por las siguientes funciones de transferencia : a) $H(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + z^{-1}\right)$; b) $G(z) = \frac{1+\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}\right)$. **Solución: a)** $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ **b)** $\omega_c = \arccos\left(\frac{2 \cdot \alpha}{1 + \alpha^2}\right)$