Tema 1: Obtener aproximaciones sucesivas a la solución de un sistema de ecuaciones lineales Ax=b :

Objetivos:

1. Encontrar criterios de convergencia para una transformación $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ tal que $A(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}) = b$
    1. Encontrar una condición suficiente para la existencia de una solución única de una ecuación de iteración lineal de punto fijo **x=Bx+c**
    2. Encontrar criterios de convergencia para una iteración lineal de punto fijo **x=Bx+c**
    3. Transformar un sistema de ecuaciones lineales **Ax=b** en una iteración lineal de punto fijo **x=Bx+c** equivalente
    4. Encontrar una condición suficiente para que dicha transformación genere una iteración lineal de punto fijo convergente
2. Aproximar iterativamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales **Ax=b** utilizando como aproximación a la matriz **A** su matriz diagonal **D** (**método de Jacobi**)
    1. Obtener la iteración lineal de punto fijo equivalente al sistema **Ax=b** por el método de Jacobi.
    2. Encontrar una condición para la matriz **A** que garantice que dicha iteración lineal de punto fijo sea convergente.
    3. Evaluar un sistema de ecuaciones lineales y adaptarlo en su caso para que cumpla la condición de convergencia
3. Aproximar iterativamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales **Ax=b** utilizando como aproximación a la matriz **A** su matriz triangular inferior **L+D** (**método de Gauss-Seidel**)
    1. Encontrar una expresión simplificada en función de **L**, **D** y **U** de la matriz **B** de la iteración lineal de punto fijo **x=Bx+c**, equivalente al sistema **Ax=b** con A=L+D+U, obtenida por el método de Gauss-Seidel.
    2. Encontrar una expresión que nos permita calcular sucesivamente los diferentes componentes del vector $\mathbf{x}^{(k+1)}$.
    3. Discutir la convergencia de la iteración lineal de punto fijo obtenida por el método de Gauss-Seidel

Metodología:

- Deducir enunciados lógicamente, trabajando en la medida de lo posible en grupos pequeños para exponer públicamente a continuación su demostración.
- Resolver problemas en grupos pequeños y exponer públicamente a continuación su resolución.
- Trabajar en aula de informática elaborando programas para la resolución iterativa de sistemas de ecuaciones lineales, ejecutándolos para la resolución de un sistema determinado y evaluando su velocidad de convergencia.

Actividades:

Actividad 1. Definiendo la norma matricial asociada a una norma vectorial por
Definición 4: $||A|| = \max_{x\neq 0} ||Ax||/||x||$
con lo que se cumple
Teorema 2: $||Bx|| \leq ||B||\cdot||x||$
demostrar por reducción al absurdo que
Teorema 3: Si $||B||<1$ & $x=Bx$, entonces $x=0$

Actividad 2. Recordando cuál es la condición necesaria y suficiente para que:
a) un sistema homogéneo de ecuaciones lineales como $x=Bx$ tenga solución única $x=0$
b) un sistema inhomogéneo de ecuaciones lineales como $x=Bx+c$ tenga solución única,
demostrar que
Teorema 4: Si $||B||<1$, entonces $x=Bx+c$ tiene solución única

Actividad 3. Recordando que, por las propiedades de los números naturales, habremos demostrado por inducción matemática que una propiedad se cumple para todo número natural k si se cumple para k=0 y podemos demostrar que, suponiendo que se cumple para k, se cumplirá para k+1, $[p_0 \ \& \ (k)\ (p_k\rightarrow p_{k+1})]\rightarrow (k)\ p_k$, demostrar que
Teorema 5: Si $x=Bx+c$ & para todo número natural k, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, entonces para todo número natural k, $x-x^{(k)}=B^k(x-x(0))$.

Actividad 4. Recordando que podemos deducir que una sucesión no negativa tenderá a cero si está acotada superiormente por otra sucesión que tiende a cero, demostrar que
Teorema 6: Si $||B||<1$ & para todo número natural k, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, entonces existe **x** tal que $x=Bx+c$ & $x=\lim_{k\rightarrow\infty} x^{(k)}$.

Actividad 5. Recordando que, si $x=Bx+c$ & $x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+c$, entonces $x-x^{(k)}=B(x-x^{(k-1)})$, así como la propiedad triangular
Teorema -1: $||x-x^{(k-1)}|| \leq ||x-x^{(k)}|| + ||x^{(k)}-x^{(k-1)}||$
demostrar que
Teorema 7: Si $x=Bx+c$ & $x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+c$ & $||B||<1$, entonces podemos acotar el error de aproximación de $\mathbf{x^{(k)}}$ a **x** por
$||x-x^{(k)}|| \leq ||x^{(k)}-x^{(k-1)}||\cdot||B||/(1-||B||)$.

Actividad 6. Demostrar que, siendo $I=(\delta_{ij})_{i,j=1...n}$ la matriz identidad (cuyos elementos valen 1 si i=j y 0 si i≠j) y A, B, C matrices n por n, se cumple que
Teorema 8: Si $B=I-C^{-1}A$ & $c=C^{-1}b$, entonces $x=Bx+c$ es equivalente a $Ax=b$.

Actividad 7. Demostrar que, definiendo
Definición 5: C es una buena aproximación a A, $C\approx A$, si y sólo si $||I-C^{-1}A||<1$
se cumple que
Teorema 9: Si $C\approx A$ & $B=I-C^{-1}A$ & $c=C^{-1}b$ & para todo número natural k, $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$, entonces $A(\lim_{k\rightarrow\infty} x^{(k)})=b$.

Actividad 8. Recordando que la inversa de la matriz diagonal $D=((\delta_{ij}A_{ii})_{i,j=1...n}$ es
Teorema -2: $D^{-1}=((\delta_{ij}/A_{ii})_{i,j=1...n}$

que los productos matriciales se calculan mediante $(XY)_{ij}=\sum_k X_{ik}Y_{kj}$ y que $\sum_k \delta_{ik}X_k = X_i$, demostrar que

<u>Teorema 10:</u> Si C=D & $B=I-C^{-1}A$ & $c=C^{-1}b$, entonces, para todo i,j=1...n, $c_i=b_i/A_{ii}$ & $B_{ij} = -A_{ij}/A_{ii}$ si $i\neq j$ & Bij=0 si i=j .

Actividad 9. Obtener la expresión de la iteración correspondiente al método de Jacobi,

<u>Teorema 11:</u> $x^{(k+1)}_i =$

Actividad 10. A partir de las siguientes definiciones:

<u>Definición 6:</u> Diremos que la matriz A es estrictamente diagonalmente dominante por filas si y sólo si, para todo i=1...n,

$|A_{ii}| > \sum_{j\neq i} |Aij|$

<u>Definición 7:</u> $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

y sabiendo que

<u>Teorema -3:</u> $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |Aij|$

demostrar que

<u>Teorema 11:</u> Si la matriz A es estrictamente diagonalmente dominante por filas, entonces la iteración correspondiente al método de Jacobi es convergente.

Actividad 11.

<u>Problema 2:</u> Aproximar la solución del sistema de ecuaciones
$\{10x_1+x_2+x_3=12,\ x_1+10x_2+x_3=12,\ x_1+x_2+10x_3=12\}$ por el método de Jacobi: iterar desde $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ hasta que $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<0.005$; acotar el error.

¿Qué pasaría si tomáramos el sistema de ecuaciones
$\{x_1+10x_2+x_3=12,\ x_1+x_2+10x_3=12,\ 10x_1+x_2+x_3=12\}$?

Actividad 12. Siendo $L_{ij}=A_{ij}$ si i>j, $L_{ij}=0$ si $i\leq j$, $U_{ij}=A_{ij}$ si i<j, $U_{ij}=0$ si $i\geq j$, de modo que

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ A_{ij} & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & A_{ii} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddots & & A_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} = L+D+U$$

Obtener una expresión simplificada de B en función de L, D y U,

<u>Teorema 12:</u> Si C=L+D & $B=I-C^{-1}A$, entonces B=

Actividad 13. Recordando que $c=C^{-1}b$, obtener la expresión matricial de la iteración correspondiente al método de Gauss-Seidel,

<u>Teorema 13:</u> $x^{(k+1)} =$

Actividad 14. Aplicar $D^{-1}(L+D)$ a ambos términos de la expresión anterior y reescribir la expresión resultante en la forma

<u>Teorema 14:</u> $x^{(k+1)} = D^{-1}($ $)$

Actividad 15. Obtener una expresión que nos permita calcular sucesivamente los distintos componentes

<u>Teorema 15:</u> $x^{(k+1)}_i =$

Desarrollar dicha expresión para el caso n=3

Actividad 16. Discutir las condiciones de convergencia del método de Gauss-Seidel.

Actividad 17.
Problema 3: Aproximar la solución del sistema de ecuaciones $\{10x_1+x_2+x_3=12,\ x_1+10x_2+x_3=12,\ x_1+x_2+10x_3=12\}$ por el método de Gauss-Seidel: iterar desde $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ hasta que $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<0.005$; comparar su velocidad de convergencia con el método de Jacobi.

Trabajo 2 (para su realización en equipo)**:**
Aproximar la solución del sistema de ecuaciones $\{5x+y=6,\ x+4y=5\}$ por el método de Jacobi a partir de $x^{(0)}=(2,2)$ y de $x_{(0)}=(10,0)$ hasta que se cumpla $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<0.05$, representando gráficamente en el plano los sucesivos puntos encontrados.
Aproximar dicha solución por el método de Gauss-Seidel a partir de $x^{(0)}=(2,2)$, representando gráficamente en el plano los sucesivos puntos encontrados.
Aplicar el método de Jacobi a partir de $x^{(0)}=(2,2)$ con el sistema escrito de esta forma: $\{x+4y=5,\ 5x+y=6\}$, representando gráficamente en el plano los sucesivos puntos encontrados.
Comparar las distintas iteraciones, valorando su convergencia.