Tema 3: Encontrar una función polinómica que pase por un conjunto de puntos:

Objetivos:

1. Demostrar la existencia y unicidad del **polinomio interpolador** de grado menor o igual que **m** que pasa por **m+1** puntos de abscisas distintas.
2. Encontrar una fórmula que nos dé directamente la expresión del polinomio interpolador.
3. Encontrar un método para obtener sucesivamente puntos interpolados a medida que introducimos nuevos puntos para interpolar.
4. Encontrar un método que nos dé sucesivos términos del polinomio interpolador.
5. Encontrar un método para interpolar conociendo las ordenadas de un conjunto de puntos y algunas derivadas en los mismos.
6. Entender los problemas de **fiabilidad** de la interpolación, especialmente si se realiza fuera del intervalo en el que se tienen datos (extrapolación) o se utilizan polinomios de un grado elevado.

Metodología:

- Deducir enunciados lógicamente, trabajando en la medida de lo posible en grupos pequeños para exponer a continuación públicamente su demostración.
- Aplicar algoritmos para resolver problemas en grupos pequeños, exponiendo a continuación públicamente su resolución.
- Trabajar en aula de informática elaborando programas para interpolación y regresión lineal, ejecutarlos y valorar los resultados obtenidos.

Actividades:

Actividad 1. Teniendo en cuenta la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea determinado, el valor del *determinante de Vandermonde*

Teorema -9: $|x_k^{\,i}| = \prod_{k>i} (x_k-x_i)$, y la Definición 9: Diremos que $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ es un **polinomio interpolador** de grado menor o igual que **m** en los puntos $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ si y sólo si, para todo $k=0,1...m$, $p(x_k)=f_k$, demostrar el Teorema 20: Si para todo $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, entonces existe un único polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en los puntos $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$.

Actividad 2. Teniendo en cuenta que: $\sum_{i=0}^{m} \Xi_i = \Xi_k + \sum_{i\neq k} \Xi_i$ para todo $k=0,1...m$, y que $\prod_{j\neq i} \Xi_{kj} = \Xi_{kk}\cdot\prod_{j\neq i\ \&\ j\neq k} \Xi_{kj}$ para todo $i\neq k$ demostrar el: Teorema 21: Si para todo $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, entonces:

$p(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i \left(\prod_{j\neq i} (x-x_j) / \prod_{j\neq i} (x_i-x_j) \right)$. Es el polinomio interpolador de $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ (**método de Lagrange**).

Actividad 3.
Problema 10: Dados los puntos

x_k	1	2	4	5
f_k	0	2	12	21

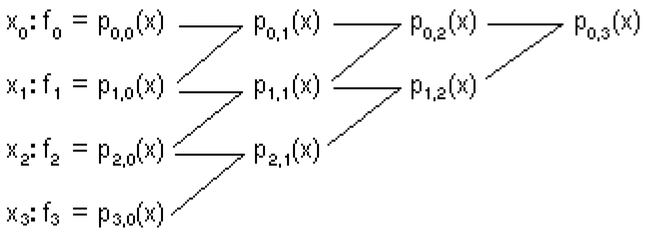
Obtener por el método de Lagrange su interpolación para x=3. (Sugerencia: al aplicar la fórmula, escribir primero cada denominador para evitar errores)

Actividad 4. Demostrar el
Teorema 22: Si para todo i,j=0,1...m, si $i\neq k$, entonces $x_i \neq x_k$,
& si $i+j\leq m$, entonces $p_{i,j}$ es el polinomio interpolador de grado menor o igual que j en $\{(x_k,f_k) / k=i,i+1...i+j\}$,entonces para todo j=1...m, i=0,1...m-j,

$$p_{i,j}(x) = ((x_{i+j}-x)p_{i,j-1}(x) + (x-x_i)p_{i+1,j-1}(x) / x_{i+j} - x_i)$$

(Sugerencia: comprobar que $p_{i,j}(x_i)=f_i$ & $p_{i,j}(x_{i+j})=f_{i+j}$ & para todo k=i+1...i+j-1, $p_{i,j}(x_k)=f_k$).

Actividad 5. Teniendo en cuenta que, con los $p_{i,j}$ definidos en el Teorema 22, Teorema 23: para todo i=0,1...m & para todo x∈R, $p_{i,0}(x) = f_i$ y Teorema 24: $p_{0,m}$ es el polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$, utilizar el algoritmo:



(**Método de Neville**)

Para resolver el: Problema 11: Dados los puntos

x_k	1	2	4
f_k	0	2	12

Obtener por el método de Neville su interpolación para x=3 .
Añadir a continuación el punto $(x_3, f_3) = (5, 21)$ y obtener la nueva interpolación para x=3 .Comparar el resultado obtenido con el del problema 10.

Actividad 6. De acuerdo con la Definición 10: Con $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ tal que para todo i,j=0,1...m, si $i\neq k$, entonces $x_i\neq x_k$, definiremos las **diferencias divididas** $f[x_i,x_{i+1},...x_j]$ mediante $f[x_i] = f_i$ para todo i=0,1...m

$f[x_i,x_{i+1},x_j] = (f[x_{i+1},...x_j] - f[x_i,...x_{j-1}] / x_j - x_i)$ para todo i=0,1...m-1, j=i+1,...m

Y calculándolas con el algoritmo:

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{f[x_0]} & & & & \\
& > \mathbf{f[x_0,x_1]} & & & \\
f[x_1] & & > \mathbf{f[x_0,x_1,x_2]} & & \\
& > f[x_1,x_2] & & > \mathbf{f[x_0,x_1,x_2,x_3]} & \\
f[x_2] & & > f[x_1,x_2,x_3] & & \\
& > f[x_2,x_3] & & & \\
f[x_3] & & & &
\end{array}$$

<u>Problema 12:</u> comprobar a partir de los puntos

k	0	1	2	3
x_k	1	2	4	5
f_k	0	2	12	21

Y comparando con los resultados obtenidos por el método de Neville que, para m=0,1,2,3,

$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m}$ $\mathbf{f[x_0,...x_j]}$ $\prod_{i=0}^{j-1} (x-x_i)$ es el polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ (**método de Newton**).

Actividad 7. Recordando que, de acuerdo con la fórmula de Taylor:
<u>Teorema -10:</u> $p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} [f^{(j)}(x_0) / j!] (x-x_0)^j$ es el polinomio de grado menor o igual que **m** que cumple las condiciones $p_m^{(j)}(x_0)=f^{(j)}(x_0)$ para j=0,1...m
Así como que:
<u>Teorema -11:</u> $\lim_{x\to x_i} (f(x)-f(x_i))/(x-x_i) = f'(x_i)$
Tomaremos:
<u>Definición 11:</u> $f[x_i,x_{i+1},...x_j] = f^{(j-i)}(x_i)/(j-i)!$ si $x_i=x_{i+1}=...=x_j$ y conocemos la derivada de orden j-i en el punto x_i de la función **f** a interpolar (naturalmente, será también $f_i=f_{i+1}=...=f_j$),
con lo cuál podremos generalizar el método de Newton repitiendo **r** veces el punto (x_i,f_i) si conocemos las derivadas hasta el orden r-1 en x_i (**interpolación de Hermite**).
<u>Problema 13:</u> Aplicar el método de Newton generalizado a partir de los datos p(0)=1, p'(0)=2, p(1)=3. Comprobar que el resultado obtenido es el polinomio de grado igual o inferior a 2 que cumple dichas condiciones.

Actividad 8. Asumiendo que el error de la interpolación polinómica de grado menor o igual que **m** viene dada por:
<u>Teorema -12:</u> $f(x)-p_m(x) = [f^{(m+1)}(\xi(x))/(m+1)!] \prod_{i=0}^{m} (x-x_i)$ tal que $\xi(x)\in[a,b]$ tal que para todo i=0,1...m, $x_i\in[a,b]$
<u>Problema 14:</u> Acotar el valor de f(3) suponiendo que

x_k	1	2	4	5
$f(x_k)$	0	2	12	21

Y que la cuarta derivada de la función f(x) en el intervalo [1,5] está entre 1 y 2.