Tema 8

# Proyecciones y Sistemas de Representación

Aunque hasta ahora hemos visto figuras, elementos y transformaciones en dos dimensiones, es evidente que los objetos que nos rodean son tridimensionales, por lo que, si el objetivo de la Expresión Gráfica es representar figuras u objetos de la realidad, debemos encontrar maneras para realizar esta representación. En este tema veremos cómo podemos representar objetos tridimensionales sobre superficies (normalmente planas) bidimensionales.

## 8.1 – Geometría Descriptiva

La **geometría descriptiva** es la parte de la geometría que tiene como objetivo representar cuerpos/figuras/objetos en superficies planas.

Los objetos del mundo real son siempre tridimensionales, pero los medios de impresión y comunicación empleados a lo largo de la historia, desde la antigüedad (papiros, papeles, libros, mapas) hasta la actualidad (pantallas, monitores, tablets) han sido fundamentalmente bidimensionales. La excepción a esta regla podría ser el globo terráqueo.

La Expresión Gráfica se apoya en la geometría descriptiva para representar objetos del mundo real (tridimensionales) mediante objetos bidimensionales como hojas de papel. Aunque tradicionalmente se ha empleado el papel como medio casi único de difusión de la información geométrica, en la actualidad, la utilización de computadores ha modificado sustancialmente esta necesidad. De todas formas, las pantallas de los ordenadores siguen siendo bidimensionales por lo que sigue siendo necesario buscar maneras de representar información mediante superficies bidimensionales.

Es evidente que, para realizar esta representación, se necesita una transformación de 3D a 2D que cumpla ciertas propiedades. Estas transformaciones dependerán del tipo de aplicación (militar, ingeniería, arte, etc.) para las que necesitemos realizar la representación.

## 8.2 – Proyecciones

Para hacer una descripción bidimensional de un cuerpo físico tridimensional es necesario realizar una transformación de 3D a 2D. A esta transformación se le llama **proyección**.

Informalmente, una proyección es una técnica de dibujo empleada para representar un objeto tridimensional en una superficie.

Matemáticamente, **una proyección es una transformación lineal idempotente sobre un espacio vectorial**. Dichas transformaciones transforman cualquier punto $x$ del espacio vectorial en un punto de un subespacio imagen de la transformación. Idempotente quiere decir que, en caso de que $x$ pertenezca al subespacio imagen, la proyección no tiene efecto, dejando el punto $x$ fijo. Por tanto, aplicar la proyección (sobre un elemento) varias veces (cada una sobre el resultado de la anterior) tiene el mismo efecto que aplicarla una sola vez.

Por ejemplo, el operador $P$ definido en $R_3$ de la forma siguiente:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un operador que "proyecta" el espacio $R_3$ sobre un espacio de dimensión 2 que consiste en los vectores cuya coordenada $z$ es $0$. En este caso, este espacio coincide con $R_2$. La aplicación es idempotente porque:

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, aplicar la proyección sobre un punto que ya ha sido proyectado previamente, no tiene efecto alguno.

En general, cualquier aplicación que transforma puntos de un sistema de coordenadas de dimensión $n$ en puntos de un sistema de coordenadas de dimensión $m$ menor que $n$, es una proyección.

En geometría, nos interesa sólo el conjunto de los números reales con dimensiones 3 y 2. Es decir, sólo nos interesan las proyecciones de $R_3$ en $R_2$ (de 3D a 2D).

Es muy importante comprender que las proyecciones **no son aplicaciones biyectivas**. Esto significa que al aplicar una proyección no es posible conocer cuál es el elemento original del que procede esa proyección.

Por este motivo, al aplicar una proyección siempre perdemos información, por lo que con sólo una proyección de una figura tridimensional, normalmente no podemos inferir la estructura tridimensional de la figura. Si lo hacemos es realizando suposiciones, no porque la proyección proporcione, en general, suficiente información para ello.

## 8.2.1 – Tipos de Proyecciones

Al margen de la definición matemática y de las propiedades algebraicas que pueden definirse a partir de las proyecciones, lo que nos interesa en la Expresión Gráfica es encontrar formas para proyectar figuras tridimensionales sobre superficies bidimensionales. Geométricamente, una proyección se forma trazando líneas (rayos) que hacen corresponder los elementos de la figura sobre una superficie de proyección.

Esto nos permite realizar una primera clasificación de las proyecciones, según el tipo de superficie que escojamos para proyectar:

**Proyecciones no planas**: aquellas que se realizan sobre superficies no planas (cilindros, esferas, conos, secciones esféricas, secciones cilíndricas, etc.).

**Proyecciones planas**: aquellas que se realizan sobre un plano. Son las más comunes (sobre todo en fotografía, dibujo) y las que usaremos en este curso.

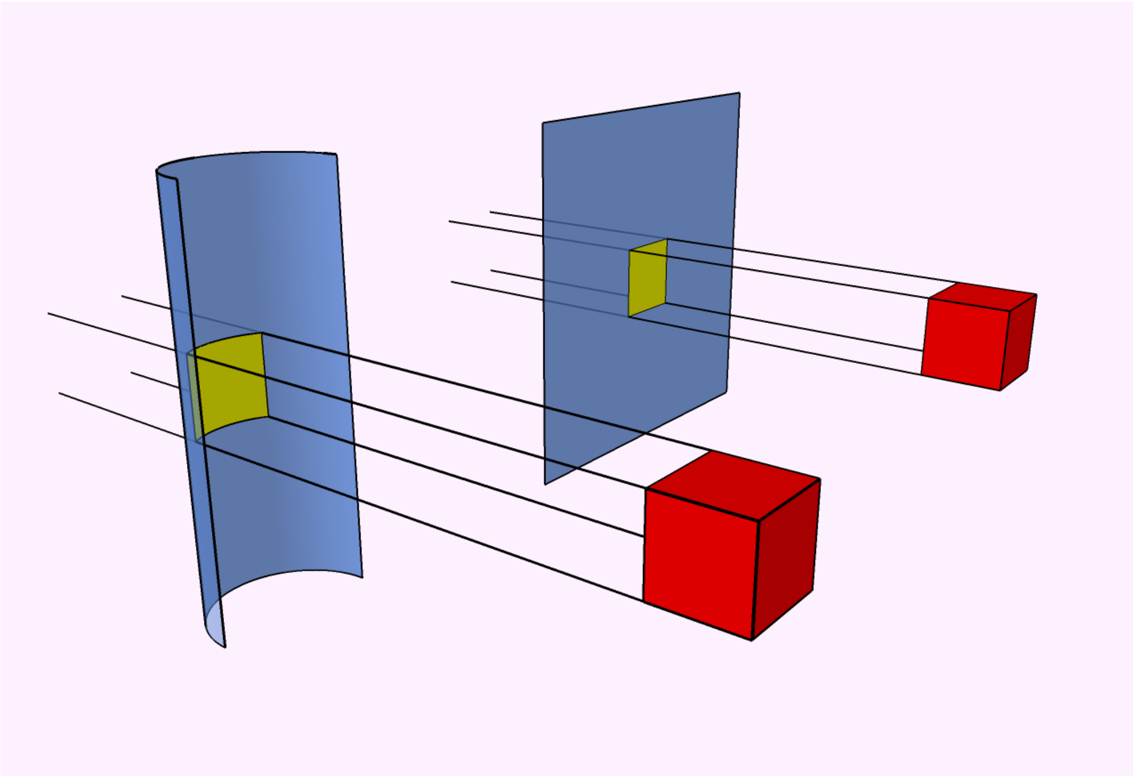

Figura 8.1 – Proyección no plana (izquierda) y plana (derecha).

### 8.2.2 –Proyecciones No Planas

Una **proyección no plana** consiste en realizar una transformación entre elementos o figuras tridimensionales sobre una superficie no plana como una esfera, un cilindro, o cualquier otra superficie curva similar.

A pesar de que el ojo humano ve con proyección aproximadamente esférica (aunque el cerebro hace correcciones), la complejidad que implica este tipo de proyecciones hace que habitualmente se empleen aproximaciones mediante superficies planas a la hora de representar figuras. Las proyecciones no planas no conservan, en general, magnitudes y ángulos al proyectar figuras. De hecho, al ser la superficie de proyección curva, ni siquiera las rectas conservan su forma recta al proyectarse, por lo que es un tipo de proyección que no nos vaya a ser de gran utilidad en ingeniería.

Uno de los usos más habituales de las proyecciones no planas es en cartografía. Dado que La Tierra es una esfera, para representar su geografía se utilizan proyecciones como la de Mercator, que consisten en proyectar el globo terráqueo sobre un cilindro. Posteriormente, realizando un corte vertical de este cilindro se obtiene una superficie plana al que llamamos mapa. Casi todos los mapas (como Google Maps) emplean proyecciones de este tipo, aunque puede haber variaciones en la forma de construir la proyección.

La forma más habitual es trazar rectas perpendiculares al eje norte-sur del planeta. Estas rectas pueden estar separadas por una cantidad constante o por una cantidad que dependa de la latitud. En cualquier caso, la manera de proceder es buscar la intersección de estas rectas con un cilindro. Las rectas al rotar alrededor sobre el eje norte-sur van cortando al cilindro y formando el mapa.

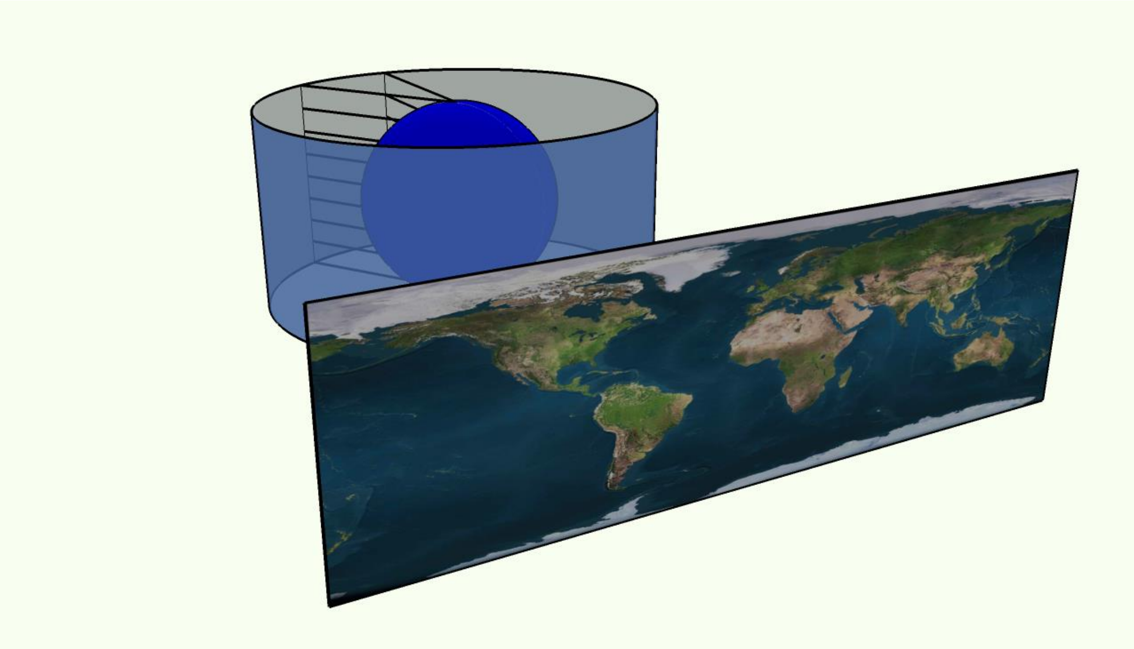

Figura 8.2 – Proyección cartográfica no plana cilíndrica y mapa resultante.

## 8.2.3 –Proyecciones Planas

Si en lugar de proyectar el objeto tridimensional sobre una superficie curva, realizamos la proyección sobre un plano, obtendremos una **proyección plana**.

Para obtener la proyección de un objeto sobre un plano, al que denominamos **plano de proyección**, debemos trazar rectas, que denominamos **rectas proyectoras o rayos proyectantes**, desde los puntos característicos del objeto (normalmente los vértices) hacia un punto, al que llamaremos **centro de proyección,** situado al otro lado del plano de proyección. La intersección de las rectas proyectantes con el plano de proyección determinará los vértices de la figura proyectada.

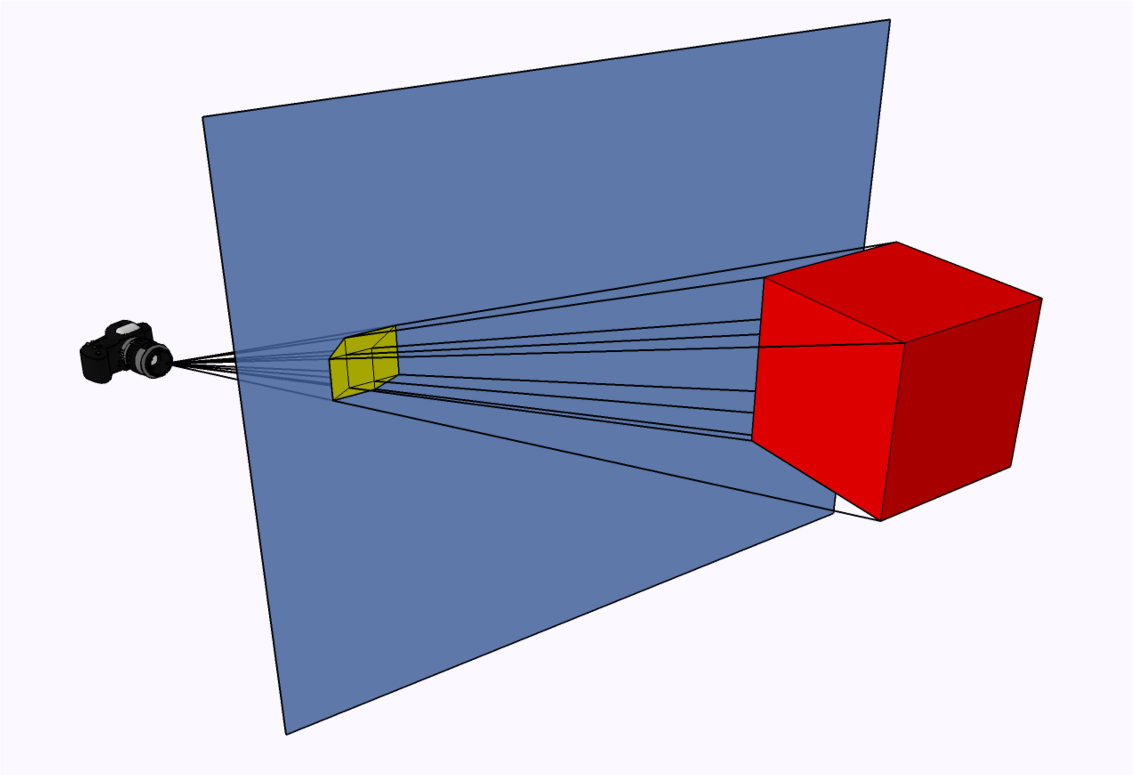

Figura 8.3 – Construcción de una proyección plana.

Como se puede intuir, la posición del centro de proyección modifica de forma notable el resultado de la proyección. Si el centro está cerca del plano de proyección, las rectas proyectantes saldrán con un ángulo relativamente pronunciado (tanto más cuanto más cerca estén el objeto y el centro de proyección) que para cada vértice será diferente. Esto hará que a partir de una figura proyectada no podamos inferir el tamaño del objeto, ya que las longitudes proyectadas no se corresponderán con las longitudes originales.

Sin embargo, si el centro de proyección está muy lejos del plano, las rectas proyectantes serán prácticamente paralelas, por lo que será más sencillo inferir el tamaño original de los objetos. Si llevamos al extremo esta idea, situando el centro de proyección en el infinito, obtendremos una **proyección plana paralela**. Si el centro de proyección es un punto finito, hablaremos de **proyección plana perspectiva**.

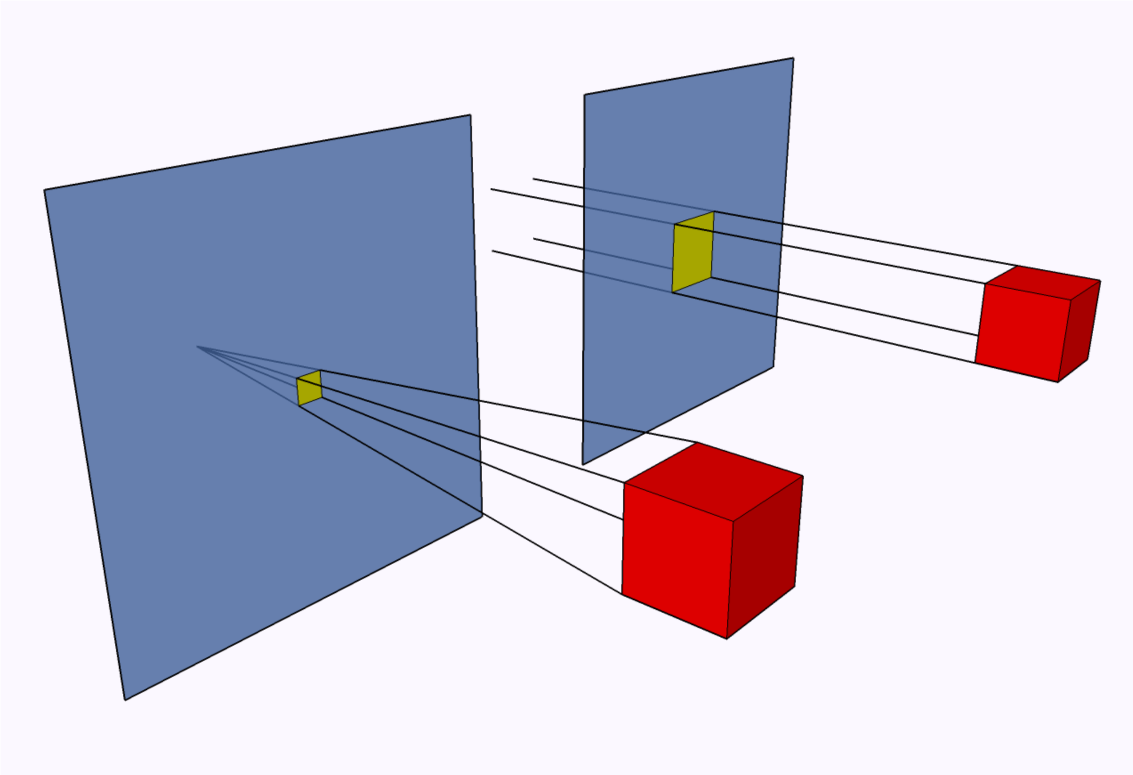

Figura 8.4 – Proyección plana perspectiva (izquierda)
y proyección plana paralela (derecha).

### 8.2.3.1 –Proyecciones Planas Perspectivas

Si el centro de proyección de una proyección plana es un punto cualquiera (finito) del espacio, entonces hablamos de proyección perspectiva.

A este tipo de proyección se le conoce a veces con el nombre de **proyección cónica**, dado que las rectas proyectantes convergen en un punto, y forman un cono si proyectamos una circunferencia sobre el plano de proyección. Sin embargo, vamos a mantener el nombre de proyección plana perspectiva, porque la proyección cónica se puede confundir con la proyección no plana cónica, que no tiene nada que ver (es aquella que resultaría de proyectar sobre un cono).

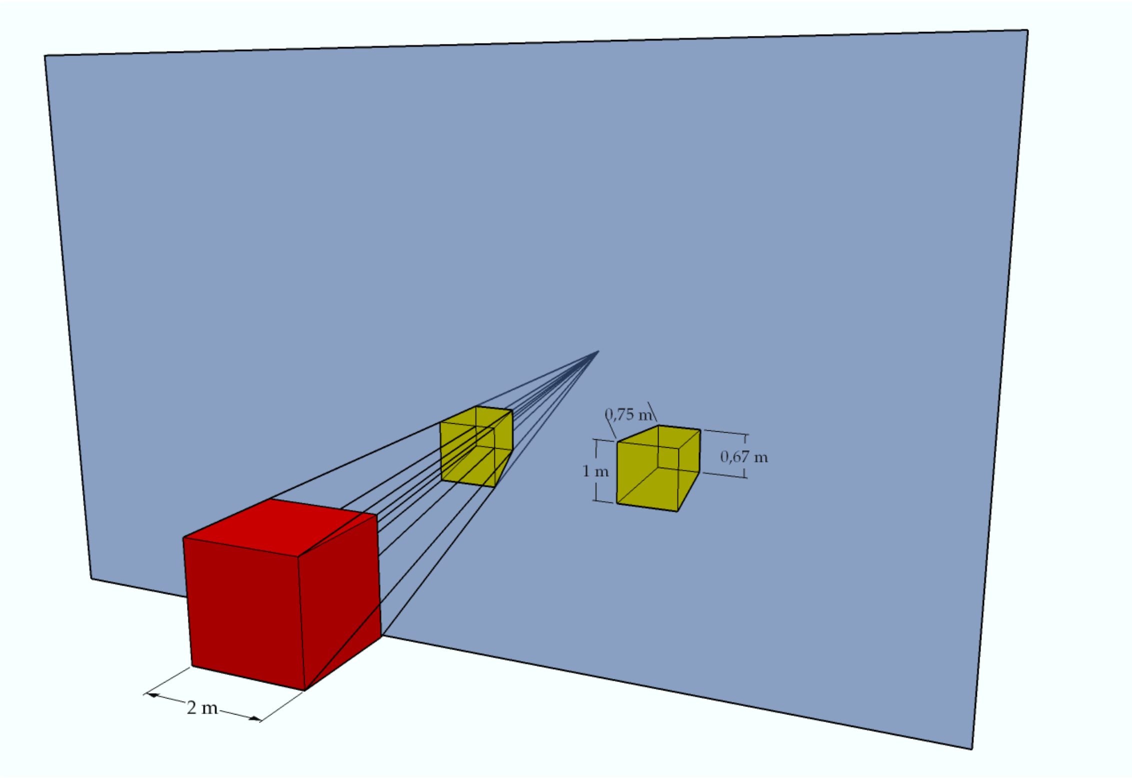


Figura 8.5 – Proyección plana perspectiva.

La proyección perspectiva es de gran importancia, puesto que es la más empleada en fotografía, dibujo artístico, simulación, videojuegos, etc. ya que es la más parecida (de las proyecciones planas) a la manera en la que el ojo humano percibe el mundo. De hecho, a igual tamaño real, los objetos lejanos tienen un tamaño proyectado más pequeño que los objetos cercanos (efecto de empequeñecimiento) lo que le da un aspecto natural a la representación, puesto que el ojo humano provoca el mismo efecto.

Sin embargo, éste mismo hecho hace que su uso en ingeniería sea más reducido, puesto que, en general, no se mantienen distancias ni ángulos en la proyección, y además, no es posible encontrar una relación sencilla entre las magnitudes proyectadas y las reales.

Esto, por tanto, las hace apropiada para arte, dibujo, y entretenimiento, pero no son tan apropiadas para ingeniería y descripciones matemáticas, ya que en ingeniería es fundamental que las relaciones entre las magnitudes proyectadas y las reales sean directas o al menos lo más sencillas posible.

Las proyecciones perspectivas pueden tener diferentes propiedades en función de la orientación del plano de proyección respecto de los ejes de coordenadas.

Una de las propiedades más importantes de una proyección perspectiva es el número de puntos de fuga que se forman al emplear una proyección. Un **punto de fuga** es el **lugar geométrico en el cual las proyecciones de las rectas paralelas a una dirección dada** en el espacio, no paralelas al plano de proyección, **convergen**.

Dependiendo de la orientación del plano de proyección respecto a los ejes de coordenadas, la proyección perspectiva puede presentar **uno, dos o hasta tres puntos de fuga**:

- **1 punto de fuga**: cuando el plano de proyección es paralelo a dos ejes y perpendicular al otro.
- **2 puntos de fuga**: cuando el plano de proyección es paralelo a un eje, y oblicuo a los otros dos.
- **3 puntos de fuga**: cuando el plano de proyección es oblicuo a los tres ejes de coordenadas.

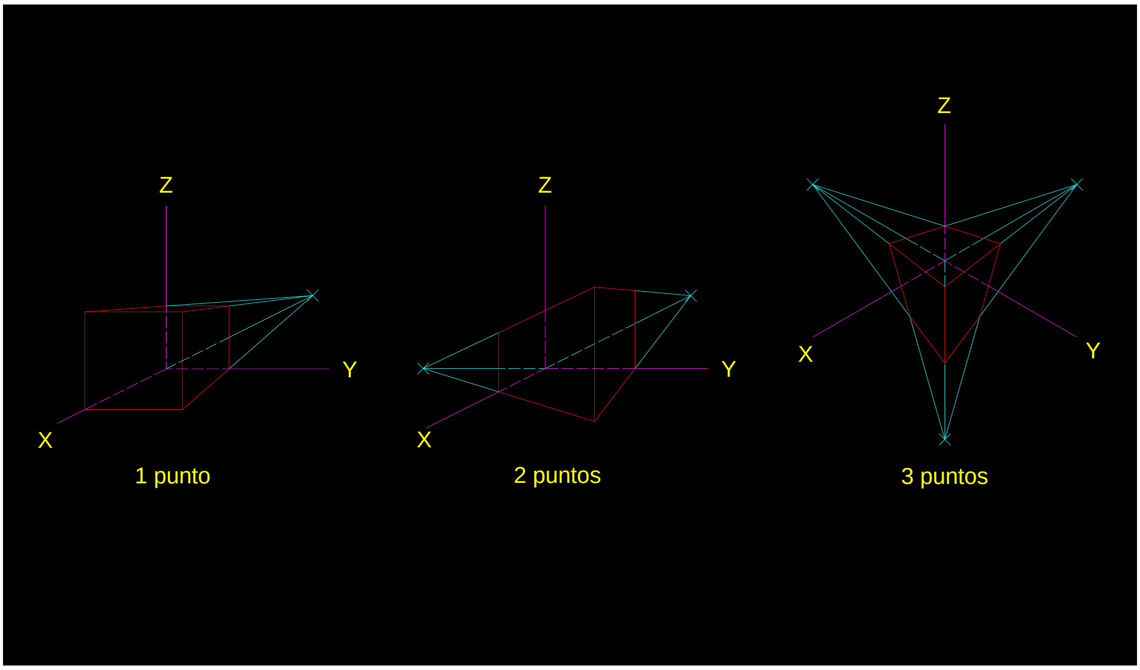


Figura 8.6 – Puntos de fuga en una proyección plana perspectiva.

La otra propiedad importante de la proyección perspectiva es el campo visual. El **campo visual es la porción del espacio que es capaz de ser capturada por la proyección**. Como, en teoría, el plano de proyección es infinito, el campo visual debería ser todo el espacio situado al lado contrario (con respecto al centro de proyección) del plano de proyección. Sin embargo, el plano de proyección, obviamente, no puede ser infinito cuando se realiza la proyección de una figura real. Cuando empleamos planos finitos, en la proyección perspectiva se genera una pirámide al unir el centro de proyección y los vértices del plano (finito). A esta pirámide se le denomina **pirámide de proyección**, y el campo visual de la proyección se reduce a los objetos incluidos en la prolongación de esa pirámide. El campo visual se mide en grados indicando el ángulo abarcado por la pirámide de proyección.

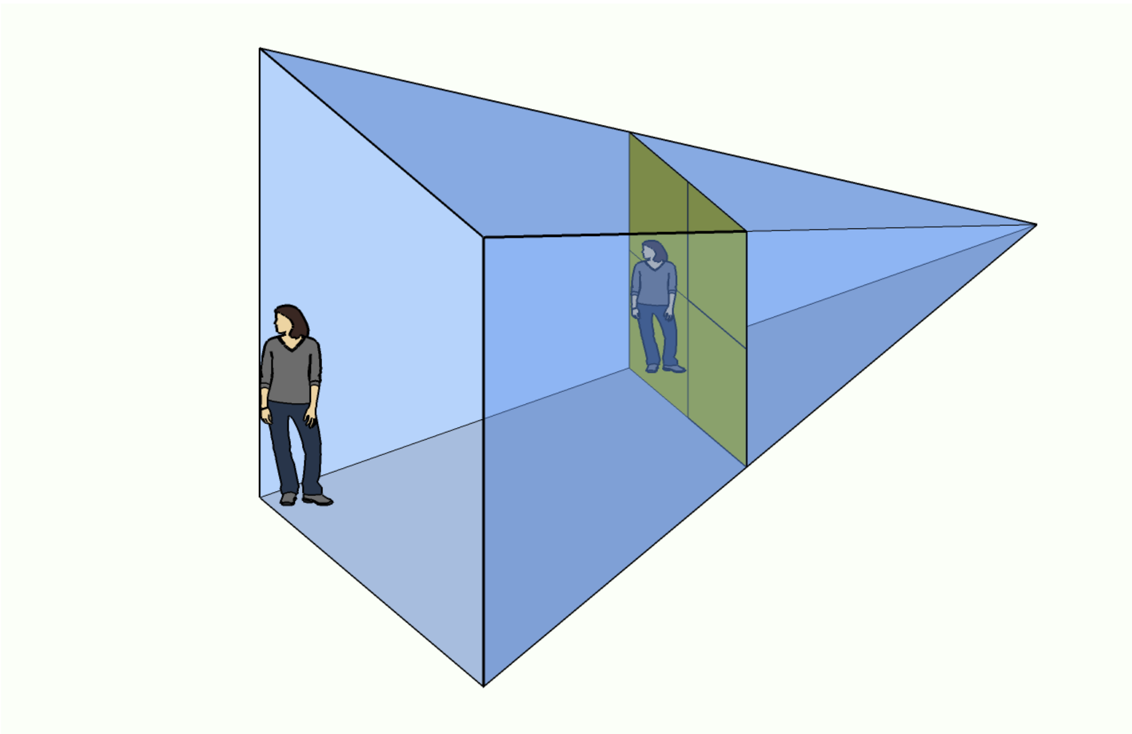

Figura 8.7 – Pirámide de una proyección plana perspectiva

Si el centro de proyección está muy lejos del plano, la pirámide es muy estrecha y el campo visual será muy reducido. Si el centro de proyección está próximo al plano, la pirámide será ancha y el campo visual será mayor. El primer caso se corresponde con lo que en fotografía se conoce como zoom (o tele), y el segundo caso, con un gran angular. El zoom permite fotografiar objetos lejanos con un tamaño aparente (proyectado) grande, ya que al ser el campo visual tan reducido, la proyección se aproxima a una proyección plana paralela (puesto que las rectas proyectantes son casi paralelas). Esto hace que los objetos lejanos sufran poco empequeñecimiento al proyectarse. Por el contrario, usando una proyección de gran angular se produce un gran empequeñecimiento de los objetos lejanos, pero, a cambio, podemos abarcar una gran parte del espacio.

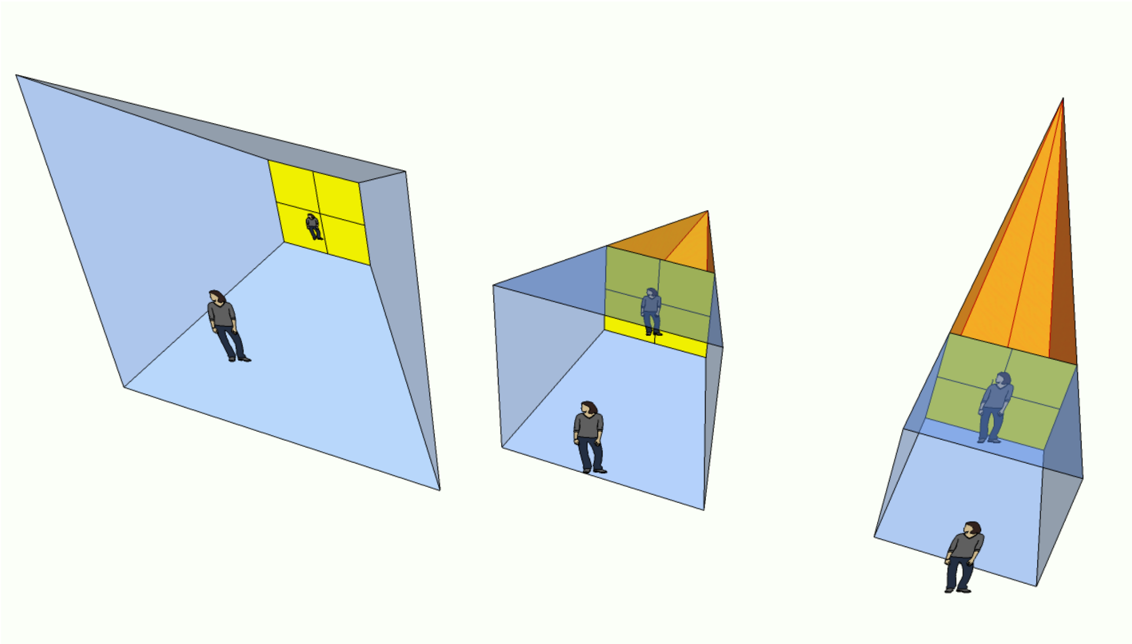

Figura 8.8 – El campo visual en la proyección plana perspectiva.
Campo visual alto (izquierda), normal (centro) y reducido (derecha).

### 8.2.3.2 –Proyecciones Planas Paralelas

En una proyección plana paralela las rectas proyectantes son todas paralelas entre sí, puesto que al estar el centro de proyección en el infinito, éstas convergerán sólo en el infinito.

A este tipo de proyección se le conoce a veces con el nombre de **proyección cilíndrica**, para constatar con la proyección plana cónica. Al igual que antes, preferiremos el nombre de proyección plana paralela, para no confundir la proyección cilíndrica con la proyección no plana cilíndrica.

Las proyecciones planas paralelas son las más empleadas en geometría descriptiva porque algunas de ellas conservan ángulos y/o distancias, y si no lo hacen, al menos existe una relación conocida y sencilla con las reales.

**Según la dirección de las rectas proyectantes** respecto al plano de proyección, hay dos tipos de proyecciones planas paralelas: la proyección **plana paralela ortogonal** (u ortográfica), cuando el plano de proyección es perpendicular a las rectas proyectantes; y la proyección **plana paralela oblicua**, cuando las rectas proyectantes son oblicuas al plano de proyección**.**

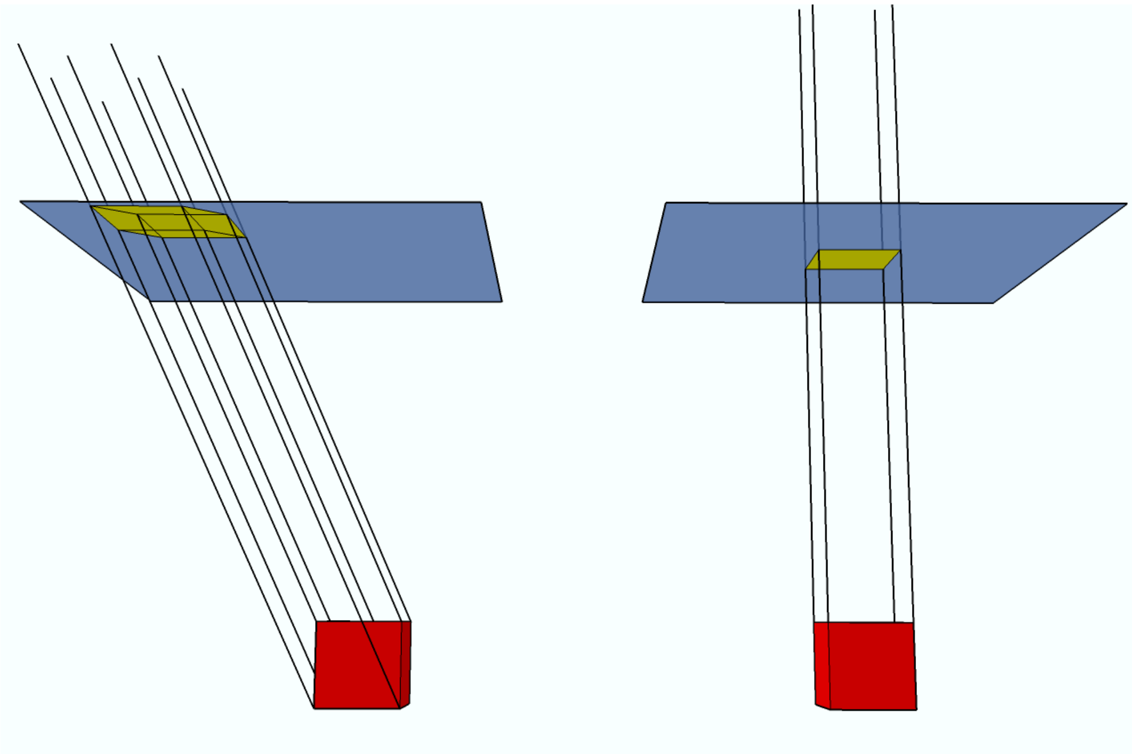

Figura 8.9 – Proyección plana paralela oblicua (izquierda)
y proyección plana paralela ortogonal (derecha).

## 8.3 – La Proyección Plana Paralela Ortogonal

Las proyecciones planas paralelas ortogonales son aquellas en las que las rectas proyectantes son paralelas entre sí, y a su vez perpendiculares a una superficie plana de proyección.

El hecho de que las rectas proyectantes sean paralelas entre sí evita el efecto de empequeñecimiento que se da en las proyecciones perspectivas. Por ello, estas proyecciones son bastante poco realistas, puesto que la sensación de profundidad se pierde y el cerebro tiene más problemas para inferir la tridimensionalidad que con las proyecciones perspectivas.

Sin embargo, son proyecciones que conservan distancias y ángulos (o al menos existe una relación sencilla entre las magnitudes proyectadas y las reales), por lo que son proyecciones muy útiles en la ingeniería para realizar descripciones exactas de piezas y edificios

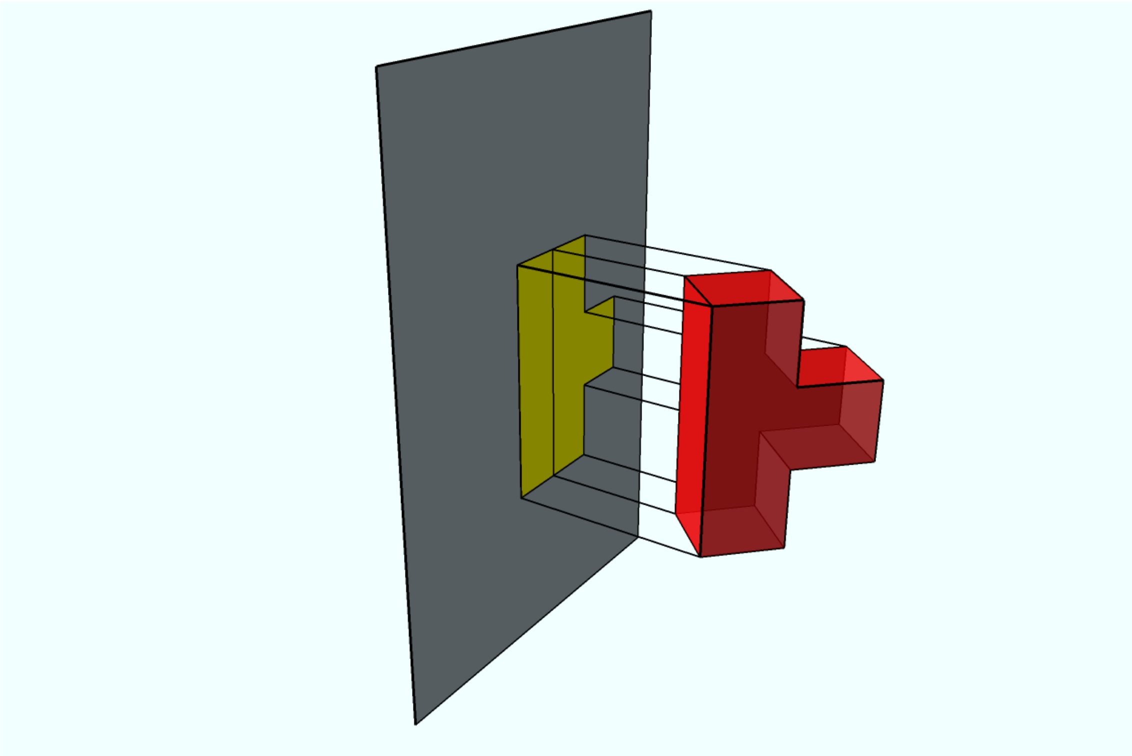

Figura 8.10 – Proyección plana paralela ortogonal.

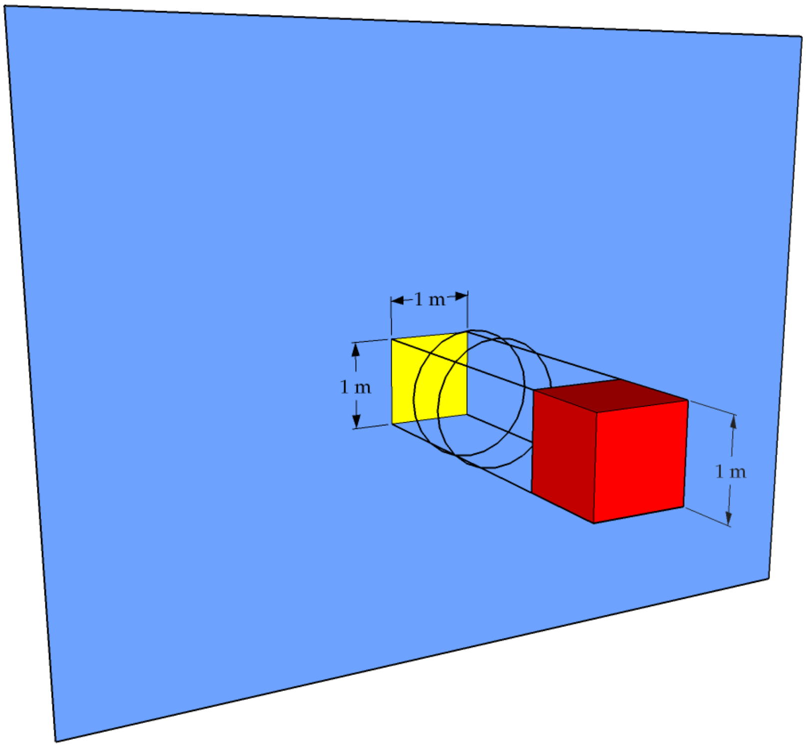

Figura 8.11 – Proyección plana paralela ortogonal
con pérdida total de información de profundidad.

## 8.3.1 – Tipos de Proyecciones Planas Paralelas Ortogonales

Las proyecciones planas paralelas ortogonales se pueden clasificar, a su vez, dependiendo de cómo esté orientado el plano de proyección. Dependiendo de la orientación del plano de proyección con respecto a los ejes de coordenadas, se clasifican en:

- Proyección plana paralela ortogonal de **alzado** (si el plano de proyección es **frontal**, es decir, perpendicular al eje que representa la dirección de profundidad).
- Proyección plana paralela ortogonal de **planta** (si el plano de proyección es **cenital**, es decir, perpendicular al eje que representa la dirección vertical).
- Proyección plana paralela ortogonal de **perfil** (si el plano de proyección **lateral**, es decir, perpendicular al eje que representa la dirección lateral).
- Proyección plana paralela ortogonal **axonométrica** (si el plano de proyección no es paralelo a ningún eje; es oblicuo a los tres ejes de coordenadas).

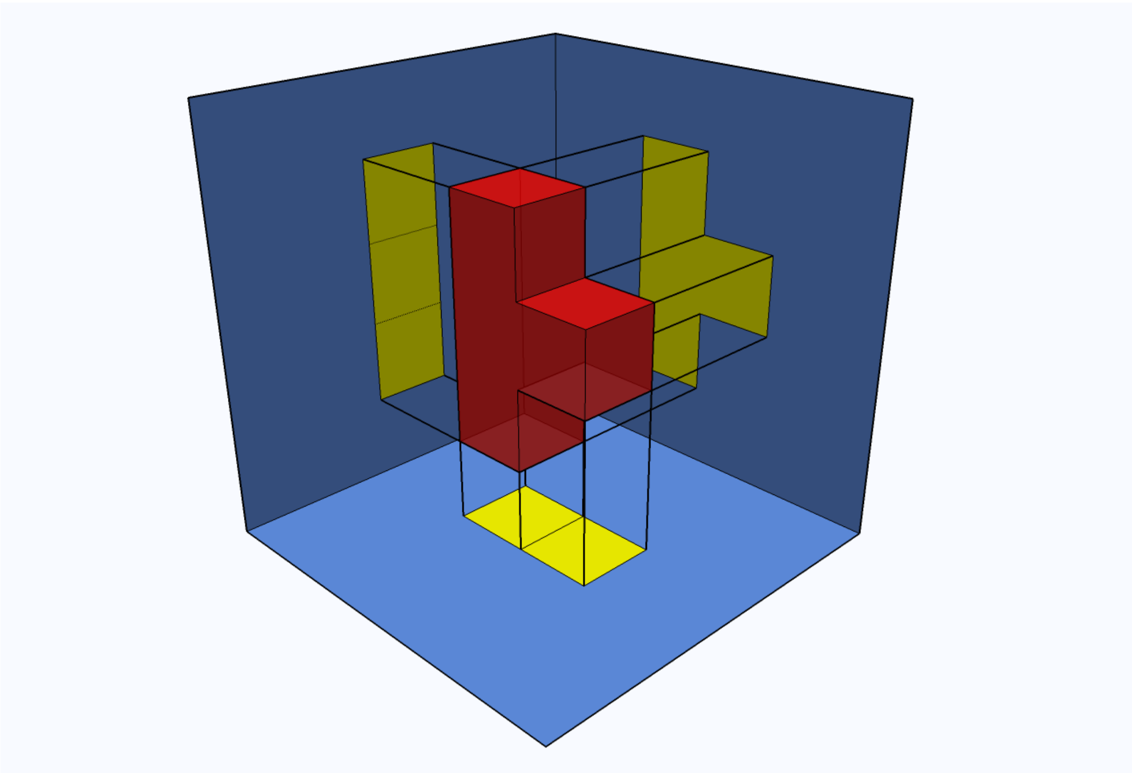

Figura 8.12 – Proyección plana paralela ortogonal de perfil (izquierda), de alzado (derecha) y de planta (abajo).

La elección de qué dirección representa la profundidad, la vertical o la lateralidad es una descripción totalmente arbitraria. Por tanto, los conceptos "ancho, alto, largo" también se pueden interpretar de manera arbitraria, aunque intenta hacerse según la posición natural de la pieza.

Las convenciones más habitualmente utilizadas son estas dos:

Eje X: dirección lateral
Eje Y: dirección de profundidad
Eje Z: dirección vertical

Eje X: dirección lateral
Eje Y: dirección vertical
Eje Z: dirección de profundidad

Aunque, evidentemente, se pueden emplear otras convenciones diferentes. Además, se suelen preferir sistemas de coordenadas dextrógiros (o de la mano derecha) en lugar de sistemas de coordenadas levógiros (o de la mano izquierda). A lo largo del curso, asumiremos que emplearemos sistemas de coordenadas dextrógiros.

Un sistema de coordenadas es dextrógiro si:

$$\vec{x} = \vec{y} \times \vec{z}$$
$$\vec{y} = \vec{z} \times \vec{x}$$
$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$$

## 8.3.2 –La Proyección Plana Paralela Ortogonal Axonométrica

La proyección plana paralela ortogonal axonométrica es aquella en la que el plano de proyección es oblicuo a los tres ejes de coordenadas. Esto significa que este plano forma un cierto ángulo con respecto a cada uno de los tres ejes.

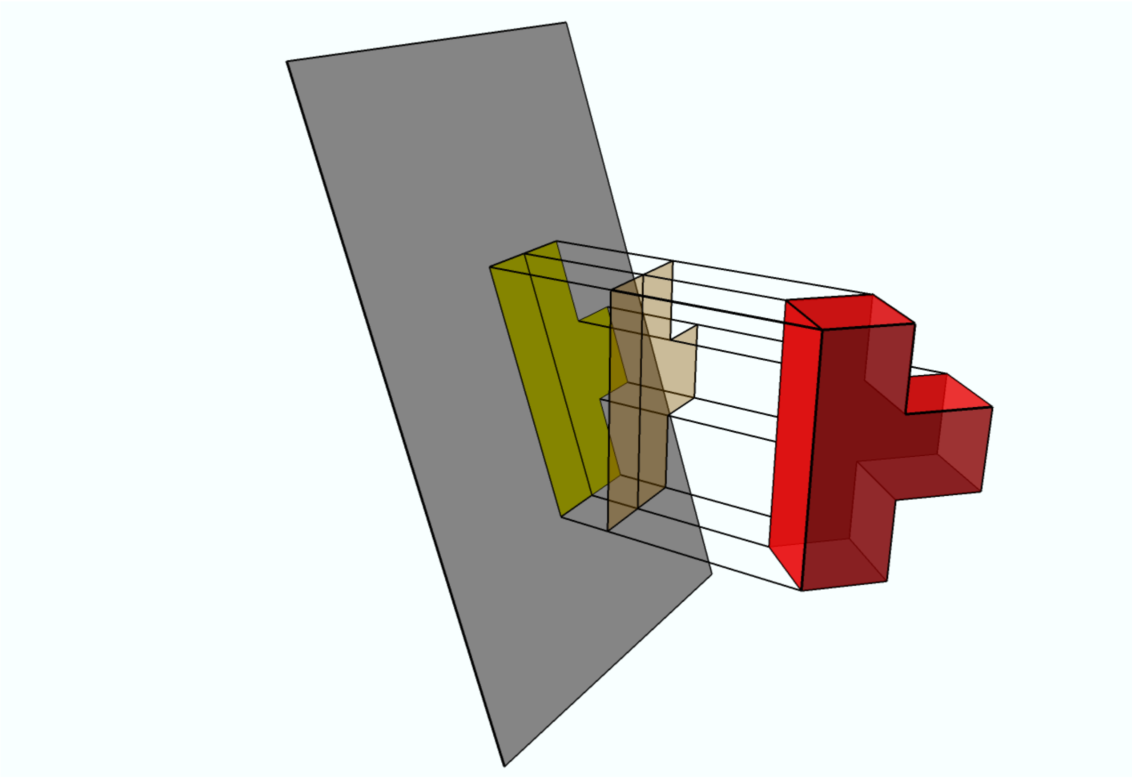

Figura 8.13 – Proyección plana paralela ortogonal axonométrica.

Ya vimos el concepto de ángulo entre dos segmentos (o dos vectores) en el plano y en el espacio. Sin embargo, el ángulo entre un vector y un plano se puede medir de diferentes maneras, por lo que definiremos ahora el concepto.

Dado que todo plano se puede describir en base a su vector normal (que es el vector perpendicular al plano), definimos **el ángulo entre un vector ($\vec{v}$) y un plano ($\pi$) como el complementario del ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con el vector $\vec{n}$ normal al plano $\pi$**. Es el ángulo entre el vector $\vec{r}$ (proyección del vector $\vec{v}$ sobre el plano $\pi$) y el vector $\vec{v}$.

En función de cuáles sean los valores de los ángulos formados entre el plano de proyección y los tres ejes de coordenadas, la proyección axonométrica es diferente y recibe diferentes nombres:

- Si los tres ángulos de corte son todos iguales, la proyección se llama **isométrica**.
- Si dos de los tres ángulos de corte son iguales, la proyección se llama **dimétrica**.
- Si los tres ángulos de corte son diferentes, la proyección se llama **trimétrica**.

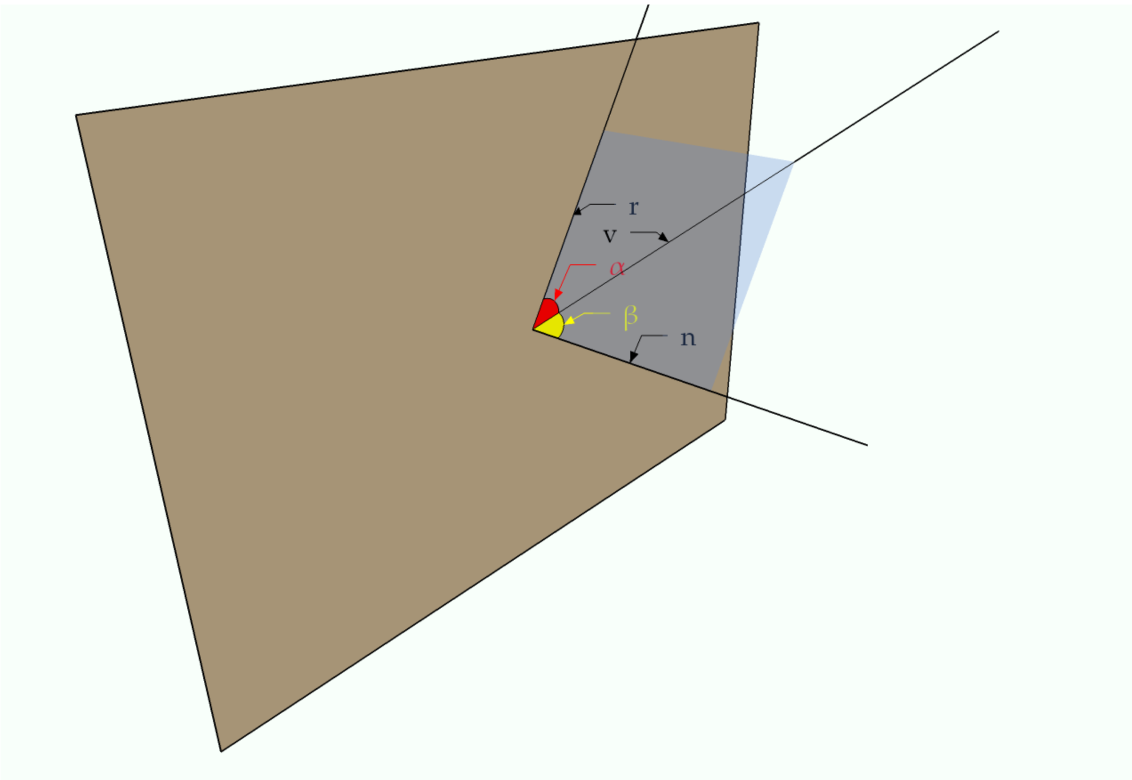


Figura 8.14 – Ángulo entre un vector y un plano.

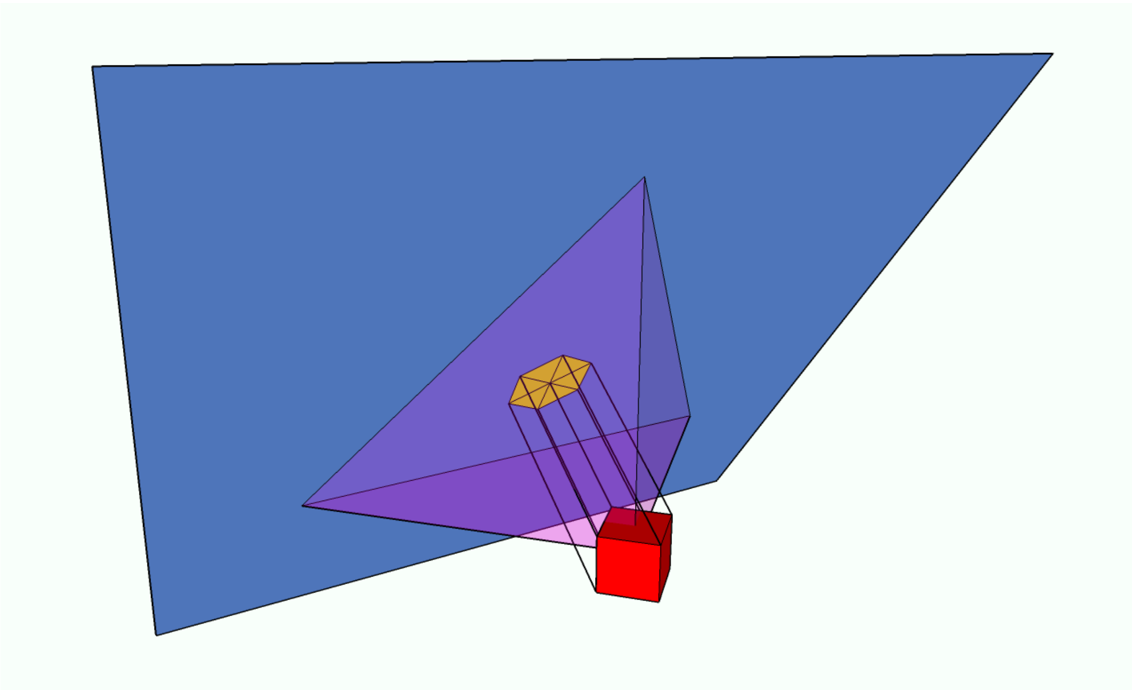

Figura 8.15 – Proyección isométrica.

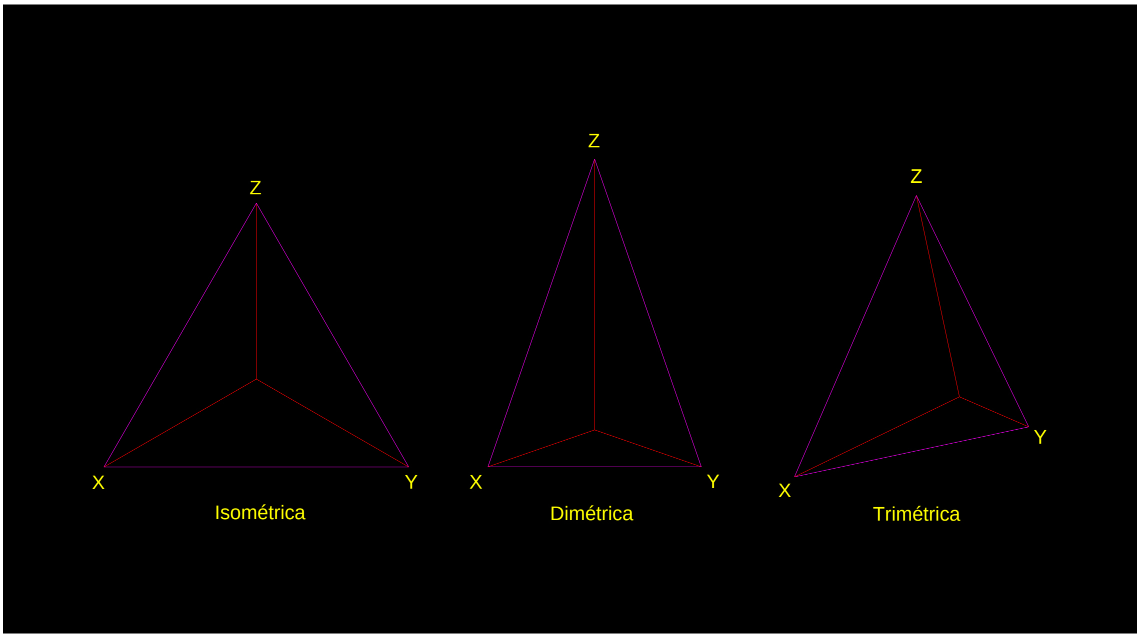


Figura 8.16 – Proyección isométrica (izquierda), dimétrica (centro) y trimétrica (derecha).

Axonométrico significa "medida sobre los ejes", del griego: *axon* (eje) y *metron* (medida). Es ésta la clave de la proyección plana paralela ortogonal axonométrica, puesto que dada una magnitud proyectada sobre un eje podemos saber cuál es la magnitud original.

Desde tiempos ancestrales, la proyección más empleada era la "natural" (la proyección perspectiva). Ésta, como vimos, no es sencilla de manejar cuando se quieren medir distancias y ángulos.

La necesidad de diseñar piezas y elementos de forma sencilla se puso de manifiesto en la Revolución Industrial. William Farish, publicó en 1820, en la Universidad de Cambridge, un trabajo denominado "*On Isometrical Perspective*", en el que definía la proyección isométrica. La proyección isométrica formulada por Farish resolvía con sencillez los complicados problemas métricos de las perspectivas con puntos de fuga. Dibujando los ejes proyectados mediante tres rectas que forman ángulos de 120°, se representan los objetos sobre estas tres rectas empleando las mismas medidas que las reales (de ahí el nombre de proyección isométrica).

Esto en realidad es una simplificación. Veremos ahora cómo podemos calcular esa relación entre las magnitudes proyectadas y las reales para cualquier proyección plana paralela ortogonal axonométrica, no sólo para la proyección isométrica.

### 8.3.2.1 –Coeficientes Axonométricos y Escalas de Proyección

Si conocemos cuál es la orientación del plano de proyección, es bastante sencillo calcular cuál es la relación entre las longitudes proyectadas y las reales.

Supongamos que conocemos el vector director (normal) del plano de proyección. Llamemos $\vec{n}$ a este vector, y $\pi$ al plano de proyección

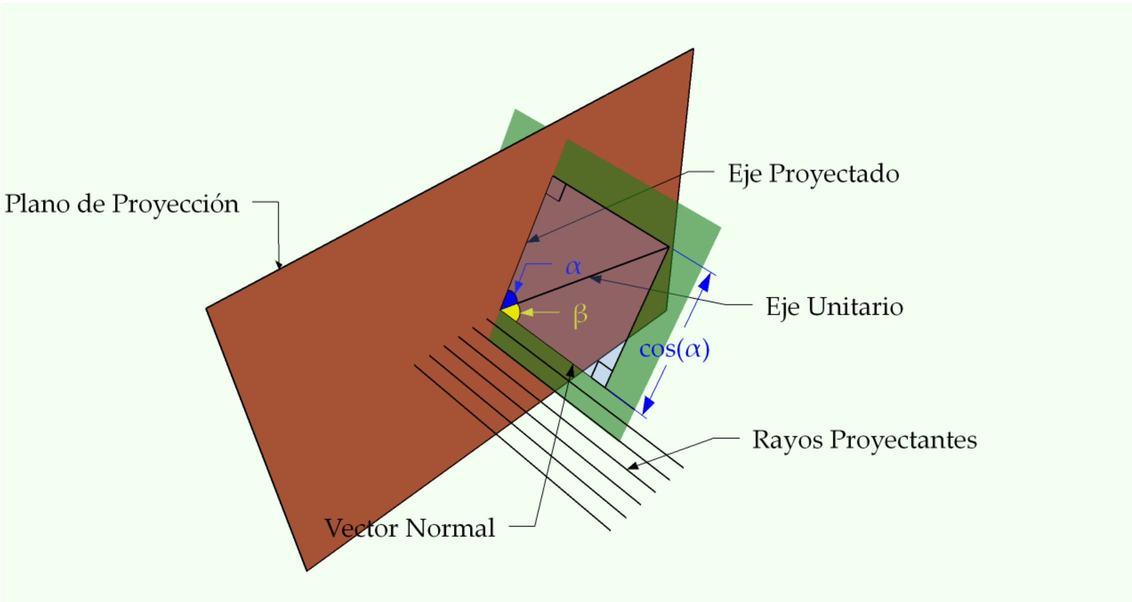


Figura 8.17 – Detalle de una proyección plana paralela ortogonal axonométrica para uno de los tres ejes de coordenadas.

Obviamente conocemos la dirección y magnitud de los tres vectores que representan las direcciones de los ejes de coordenadas. Llamaremos a estos tres vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ y $\overrightarrow{e_z}$. Al ser los vectores directores de los ejes de coordenadas, éstos son unitarios. Esto es:

$$|\overrightarrow{e_x}| = |\overrightarrow{e_y}| = |\overrightarrow{e_z}| = 1$$

Si lo que queremos conocer es cuál es la magnitud que van a tener los objetos al proyectarse, lo que debemos averiguar son las longitudes proyectadas (sobre el plano de proyección) de los vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ y $\overrightarrow{e_z}$. Llamaremos $\overrightarrow{e_{xp}}$, $\overrightarrow{e_{yp}}$ y $\overrightarrow{e_{zp}}$ a la proyección de los vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ y $\overrightarrow{e_z}$ sobre el plano de proyección.

Como podemos ver en la figura, las longitudes proyectadas se pueden calcular fácilmente a partir del ángulo que forma cada uno de los ejes con respecto al plano.

Tomemos como ejemplo el eje $x$. Si llamamos $\alpha_x$ al ángulo que forma el eje $x$ con el plano de proyección, entonces:

$$\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right| = \left|\overrightarrow{e_x}\right| \cdot cos(\alpha_x) = cos(\alpha_x)$$

El ángulo $\alpha_x$ es el complementario del ángulo $\beta_x$ cuyo valor se puede calcular, a su vez, fácilmente a partir de los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{e_x}$ empleando el producto escalar:

$$cos(\beta_x) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_x}}{|\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{e_x}\right|}$$

$$\beta_x = acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_x}}{|\vec{n}|}\right)$$

Por tanto:

$$\alpha_x = 90° - \beta_x$$

$$\alpha_x = 90° - acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_x}}{|\vec{n}|}\right)$$

A la relación entre las magnitudes proyectadas y las reales (es decir, a los valores de $\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right|$, $\left|\overrightarrow{e_{yp}}\right|$ y $\left|\overrightarrow{e_{zp}}\right|$, dado que la longitud de los vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ es 1) se les llama **coeficientes de reducción** o **escala de proyección**, y se suele expresar como $R_x$, $R_y$, $R_z$.

Con lo que la expresión final (aplicando la fórmula a los otros dos ejes) es:

$$\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right| = cos\left(90° - acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_x}}{|\vec{n}|}\right)\right) = R_x$$

$$\left|\overrightarrow{e_{yp}}\right| = cos\left(90° - acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_y}}{|\vec{n}|}\right)\right) = R_y$$

$$\left|\overrightarrow{e_{zp}}\right| = cos\left(90° - \ acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_z}}{|\vec{n}|}\right)\right) = R_z$$

Como podemos ver, es posible calcular la magnitud proyectada a partir del ángulo que forma el plano de proyección con cada uno de los tres ejes de coordenadas, o también a partir de la dirección del plano de proyección (el vector $\vec{n}$).

La **escala de proyección** se suele expresar como $E_p$ denotando cada uno de los tres coeficientes de reducción separados entre sí por dos puntos:

$$E_p = \ R_x : R_y : R_z$$

En el caso de la proyección axonométrica, a los coeficientes se les llama coeficientes de reducción axonométricos. Es posible aplicar este concepto a todos los tipos de proyección, no sólo a las axonométricas. En el caso de las proyecciones axonométricas los coeficientes reducen las magnitudes proyectadas, pero en otros tipos de proyecciones los coeficientes pueden ser de amplificación ya que pueden amplificar las magnitudes reales al proyectarse.

Además, es habitual normalizar estos valores, dividiéndolos por el mayor de los tres, y entonces recibe el nombre de **escala de proyección normalizada** y lo denotaremos como $E_{pn}$.

Veamos ahora dos ejemplos:

**Ejemplo 1: proyección con vector director $\vec{n} = (1, 1, 1)$ - Isométrica**

Para el eje $\overrightarrow{e_x}$ tenemos:

$$\beta_x = acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_x}}{|\vec{n}|}\right) = acos\left(\frac{\overrightarrow{(1,1,1)} \cdot \overrightarrow{(1,0,0)}}{\sqrt{1+1+1}}\right) = acos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = acos(0{,}577) = 54{,}73°$$

Y por tanto:

$$\alpha_x = 90° - \beta_x = 35{,}26°$$
$$\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right| = cos(\alpha_x) = 0{,}8165$$

Si repetimos lo mismo para $\overrightarrow{e_y}$ y $\overrightarrow{e_z}$ obtenemos el mismo resultado, por lo que:

$$\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right| = R_x = 0{,}8165$$
$$\left|\overrightarrow{e_{yp}}\right| = R_y = 0{,}8165$$
$$\left|\overrightarrow{e_{zp}}\right| = R_z = 0{,}8165$$

Y por tanto, la escala de proyección es:

$$E_p = 0{,}8165 : 0{,}8165 : 0{,}8165$$

Y la escala de proyección normalizada es:

$$E_{pn} = \frac{0{,}8165}{0{,}8165} : \frac{0{,}8165}{0{,}8165} : \frac{0{,}8165}{0{,}8165} = 1 : 1 : 1$$

Como vemos, las magnitudes proyectadas guardan la misma relación para los tres ejes de coordenadas. Estamos ante una proyección isométrica como la definida por Farish. De hecho Farish empleó la escala de proyección normalizada $1 : 1 : 1$ para construir su proyección y no la escala $0{,}8165 : 0{,}8165 : 0{,}8165$. En realidad, aunque es importante conocer la relación entre las magnitudes proyectadas y las reales, a veces nos basta con conocer la relación entre las proyecciones a lo largo de las direcciones de cada uno de los ejes de coordenadas.

**Ejemplo 2: proyección con vector director $\vec{n} = (2, 1, 1)$ - Dimétrica**

Para el eje $\overrightarrow{e_x}$ tenemos:

$$\beta_x = acos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_x}}{|\vec{n}|}\right) = acos\left(\frac{\overrightarrow{(2,1,1)} \cdot \overrightarrow{(1,0,0)}}{\sqrt{4+1+1}}\right) = acos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) =$$
$$= acos(0{,}8165) = 35{,}26°$$

Y por tanto:

$$\alpha_x = 90° - \beta_x = 54{,}73°$$
$$\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right| = cos(\alpha_x) = 0{,}5777$$

Si repetimos lo mismo para $\overrightarrow{e_y}$:

$$\beta_y = acos\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{e_y}}{|\vec{n}|}\right) = acos\left(\frac{\overrightarrow{(2,1,1)}\cdot\overrightarrow{(0,1,0)}}{\sqrt{4+1+1}}\right) = acos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$
$$= acos(0{,}408) = 65{,}905°$$

$$\alpha_y = 90° - \beta_y = 24{,}095°$$
$$\left|\overrightarrow{e_{yp}}\right| = cos(\alpha_y) = 0{,}9128$$

El resultado para $\overrightarrow{e_z}$ es el mismo que para $\overrightarrow{e_y}$, por lo que:

$$\left|\overrightarrow{e_{xp}}\right| = R_x = 0{,}5777$$
$$\left|\overrightarrow{e_{yp}}\right| = R_y = 0{,}9128$$
$$\left|\overrightarrow{e_{zp}}\right| = R_z = 0{,}9128$$

Y por tanto, la escala de proyección es:

$$E_p = 0{,}5777 : 0{,}9128 : 0{,}9128$$

Y la escala de proyección normalizada es:

$$E_{pn} = \frac{0{,}5777}{0{,}9128} : \frac{0{,}9128}{0{,}9128} : \frac{0{,}9128}{0{,}9128} = 0{,}632 : 1 : 1 \approx 3/5 : 1 : 1$$

En este caso, las magnitudes proyectadas guardan la misma relación para dos de los ejes de coordenadas ($y$, $z$) y es diferente para el tercero ($x$). Estamos ante una proyección dimétrica.

### 8.3.2.2 –Triángulo Fundamental o de las Trazas

El **triángulo fundamental o de las trazas**: es aquél formado por **el plano de proyección al cortar con los ejes de coordenadas** (las trazas son los cortes con los ejes coordenados, de ahí el nombre).

Hay infinitos triángulos fundamentales (ya que no importa a que altura hagamos el corte), pero son todos semejantes.

La importancia del triángulo fundamental radica en que conociéndolo queda definido el sistema axonométrico. Los ejes de coordenadas se proyectan según las alturas de dicho triángulo. La distancia entre el ortocentro y cada uno de los vértices del triángulo fundamental marca la relación entre las longitudes proyectadas sobre cada eje. Por tanto, el ortocentro del triángulo fundamental es el punto donde se cruzan las proyecciones de los ejes coordenados $x$, $y$, $z$.

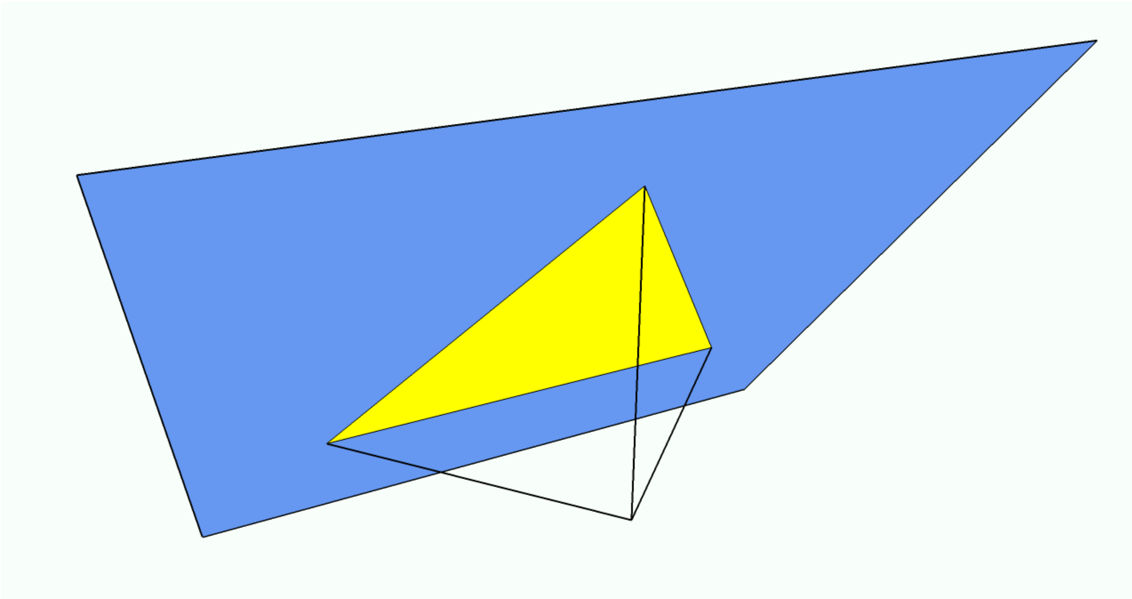

Figura 8.18 – Triángulo fundamental de una proyección plana paralela ortogonal axonométrica.

### 8.3.2.3 – Relación entre Coeficientes de Reducción Axonométricos

Como hemos visto, los coeficientes de reducción de una proyección plana paralela ortogonal axonométrica son los cosenos de los ángulos que forman los ejes de coordenadas con el plano de proyección. Sin embargo, los coeficientes de reducción de una proyección plana paralela ortogonal axonométrica guardan una relación entre sí.

Esta relación es la siguiente:

$$R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2 = 2$$

Dicha expresión se puede deducir de la manera siguiente. Supongamos una proyección plana paralela ortogonal axonométrica, en la que, por definición, el plano de proyección es oblicuo a los ejes de coordenadas y formará con ellos unos ángulos que llamaremos $\alpha$, $\beta$, y $\gamma$.

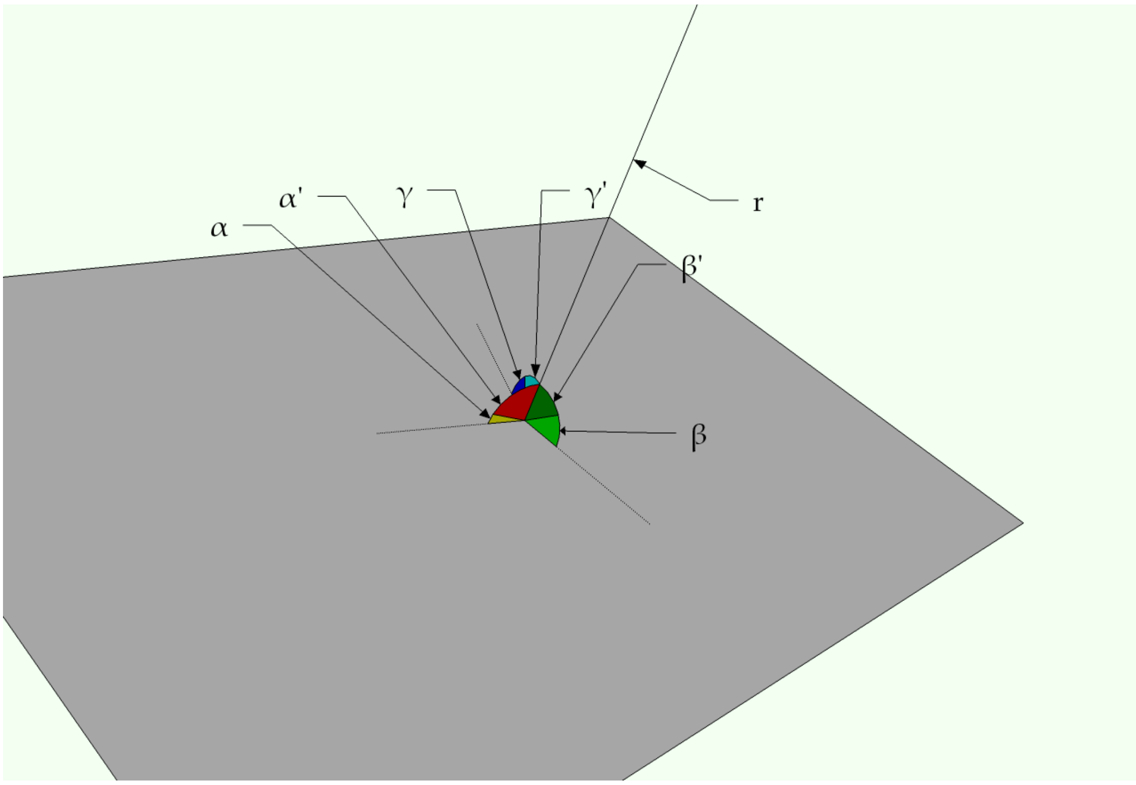


Figura 8.19 – Recta perpendicular a un plano axonométrico.

Imaginemos ahora una recta $r$ que pase por el origen de coordenadas y que sea perpendicular al plano de proyección. Dicha recta formará con lo ejes de coordenadas del espacio tres ángulos que llamaremos $\alpha'$, $\beta'$, y $\gamma'$. Por tanto, los cosenos directores de dicha recta verificarán (puesto que toda recta en el espacio lo cumple) la expresión siguiente:

$$cos^2\alpha' + cos^2\beta' + cos^2\gamma' = 1$$

Como $\alpha$ y $\alpha'$ son ángulos complementarios (por ser la recta perpendicular al plano de proyección) y lo mismo ocurre con $\beta$ y $\beta'$ , y también con $\gamma'$ y $\gamma$, entonces:

$$\begin{aligned} cos^2\alpha' &= sin^2\alpha \\ cos^2\beta' &= sin^2\beta \\ cos^2\gamma' &= sin^2\gamma \end{aligned}$$

Con lo cual, la expresión de los cosenos directores se puede transformar en:

$$sin^2\alpha + \; sin^2\beta + sin^2\gamma = 2$$

Y dado que:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Podemos afirmar que:

$$cos^2\alpha + \ cos^2\beta + cos^2\gamma = 2$$

Como precisamente los cosenos de los ángulos $\alpha$, $\beta$, y $\gamma$ son los coeficientes de reducción de la proyección axonométrica ($R_x$, $R_y$, $R_z$ ), entonces la expresión es:

$${R_x}^2 + \ {R_y}^2 + {R_z}^2 = 2$$

Esta expresión se cumple para toda proyección plana paralela ortogonal axonométrica.

En la **proyección isométrica**, tenemos:

$$R_x = R_y = R_z$$
$${R_x}^2 + \ {R_x}^2 + {R_x}^2 = 2$$
$$3 \cdot {R_x}^2 = 2$$
$$R_x = R_y = R_z = \sqrt{2/3} = 0{,}8165$$

Y el ángulo que forman cada uno de los tres ejes con el plano de proyección es:

$$\alpha = \beta = \gamma = \mathrm{acos}\left(\sqrt{2/3}\right) = 35{,}26°$$

Este es el ángulo que forman los ejes coordenados con el plano de proyección. No hay que confundirlo con el ángulo que forman entre sí los ejes al proyectarse, que es de 120º.

### 8.3.2.4 –Teorema de Schlömilch-Weisbach

Este teorema relaciona el triángulo de las trazas con la proyección axonométrica. El enunciado es el siguiente:

a) Las proyecciones ortogonales de los ejes de coordenadas sobre el plano de proyección, son las bisectrices del triángulo órtico del triángulo de las trazas (que coinciden con la dirección de las alturas del triángulo fundamental).

b) Los cuadrados de las escalas axonométricas y la natural son respectivamente proporcionales a los lados y al semiperímetro del triángulo órtico del triángulo de las trazas. Esto es:

$$\frac{{e_x}^2}{a} = \frac{{e_y}^2}{b} = \frac{{e_z}^2}{c} = \frac{e^2}{p}$$

Siendo $a$, $b$, $c$ los lados del triángulo órtico, y $p$ el semiperímetro del mismo.

Conociendo el triángulo órtico del triángulo de las trazas podemos saber las escalas axonométricas:

$$e_x = \sqrt{\frac{e^2 \cdot a}{p}}$$

$$e_y = \sqrt{\frac{e^2 \cdot b}{p}}$$

$$e_z = \sqrt{\frac{e^2 \cdot c}{p}}$$

Dado que lo normal es conocer qué medida proyectada corresponde con una unidad real, si fijamos $e = 1$, la expresión se puede transformar en:

$$R_x = \sqrt{\frac{a}{p}}$$

$$R_y = \sqrt{\frac{b}{p}}$$

$$R_z = \sqrt{\frac{c}{p}}$$

dado que $R_x, R_y, R_z$ son los factores de reducción entre las escalas axonométricas y la natural. Es decir, el cociente entre la medida proyectada ($e_x$, $e_y$ o $e_z$) y la real ($e$, que en este caso es igual a la unidad).

A partir de los coeficientes de reducción podemos saber qué ángulos de corte forman cada uno de los ejes con el plano de proyección (es el arco cuyo coseno es igual al valor del factor de reducción para cada eje).

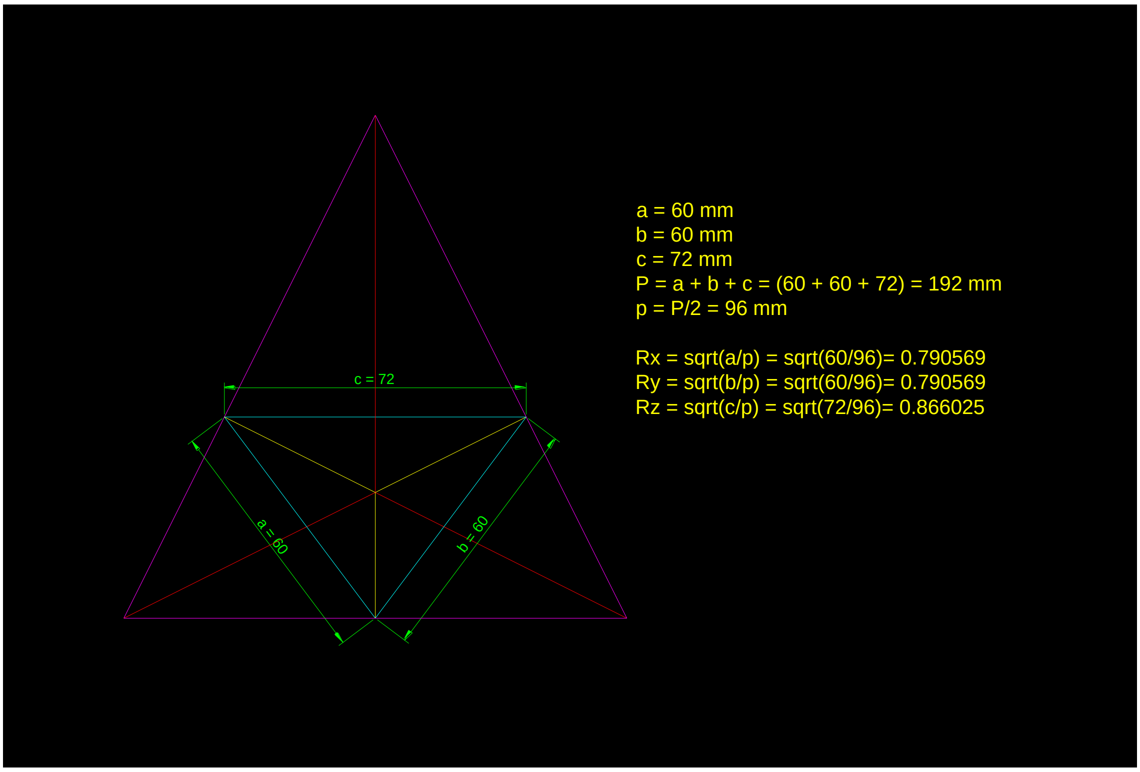


Figura 8.20 – Ejemplo de aplicación del teorema Schlömilch-Weisbach para obtener los coeficientes de una proyección dimétrica conocido el triángulo de las trazas.

Y de igual forma, si conocemos la relación de escalas podemos conocer las medidas del triángulo órtico, y dibujarlo de un cierto tamaño escogiendo un valor para el semipérimetro:

$$a = \frac{{e_x}^2}{e^2} \cdot p$$

$$b = \frac{{e_y}^2}{e^2} \cdot p$$

$$c = \frac{{e_z}^2}{e^2} \cdot p$$

Además, dado que $p$ es el semiperímetro de un triángulo, se cumple que:

$$a + b + c = 2p$$

Por lo que:

$$\frac{{e_x}^2}{e^2} \cdot p + \frac{{e_y}^2}{e^2} \cdot p + \frac{{e_z}^2}{e^2} \cdot p = 2p$$

$$\left(\frac{e_x}{e}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{e}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{e}\right)^2 = 2$$

que es, en realidad, la expresión que vimos antes:

$${R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2 = 2$$

ya que $R_x, R_y, R_z$ son los factores de reducción entre las escalas axonométricas y la natural. Es decir, el cociente entre la medida proyectada ($e_x$, $e_y$ o $e_z$) y la real ($e$):

$$R_x = \frac{e_x}{e}$$
$$R_y = \frac{e_y}{e}$$
$$R_z = \frac{e_z}{e}$$

Así pues, conociendo los coeficientes de una proyección axonométrica, es posible dibujar el triángulo de lados iguales o proporcionales al cuadrado de éstos y sus bisectrices, obteniendo de este modo los ejes del sistema axonométrica diseñado.

Y también al contrario, a partir de lo ángulos que forman los ejes de coordenadas entre sí al proyectarse, es posible calcular los coeficientes de reducción. Esta última construcción no es inmediata, pero el teorema nos permite obtenerlas.

# 8.4 – La Proyección Plana Paralela Oblicua

## 8.4.1 – Definición y Tipos

Las proyecciones planas paralelas oblicuas son aquellas en las que las rectas proyectantes son paralelas entre sí, pero éstas no son perpendiculares, sino oblicuas, a una superficie plana de proyección. Este último hecho las diferencia de las proyecciones planas paralelas ortogonales.

Al igual que en las proyecciones planas paralelas ortogonales, el hecho de que las rectas proyectantes sean paralelas entre sí evita el efecto de empequeñecimiento que se da en las proyecciones perspectivas.

Sin embargo, dado que las rectas proyectantes no son ortogonales al plano, sino oblicuas, hace que la pérdida de sensación de profundidad sea menor. Por ello, estas proyecciones, aunque no son tan realistas como las perspectivas, puesto que la sensación de profundidad se pierde un poco, son algo más adecuadas para realizar dibujos realistas que las ortogonales.

Además, son proyecciones en las que, al igual que ocurre con las ortogonales, existe una relación sencilla entre las magnitudes proyectadas y las reales, por lo que son proyecciones muy útiles en la ingeniería para realizar descripciones exactas de piezas y edificios.

En la proyección plana paralela oblicua, lo más habitual es que el plano de proyección sea perpendicular a alguno de los ejes de coordenadas. Si suponemos que el plano de proyección es perpendicular al eje $z$, entonces el plano $xy$ coincidirá con el plano de proyección. Con esta construcción, la proyección plana paralela oblicua se formaría trazando rectas oblicuas a ese plano de proyección.

El ángulo que forme el plano de proyección con las rectas proyectantes va a determinar la forma de la proyección y sobre todo, la relación que existe entre las magnitudes proyectadas y las reales, esto es, el coeficiente de reducción. En este caso, además, este ángulo puede ser tal que las magnitudes proyectadas sean menores, iguales pero también mayores que las proyectadas. Por tanto, los coeficientes pueden ser de reducción o de ampliación

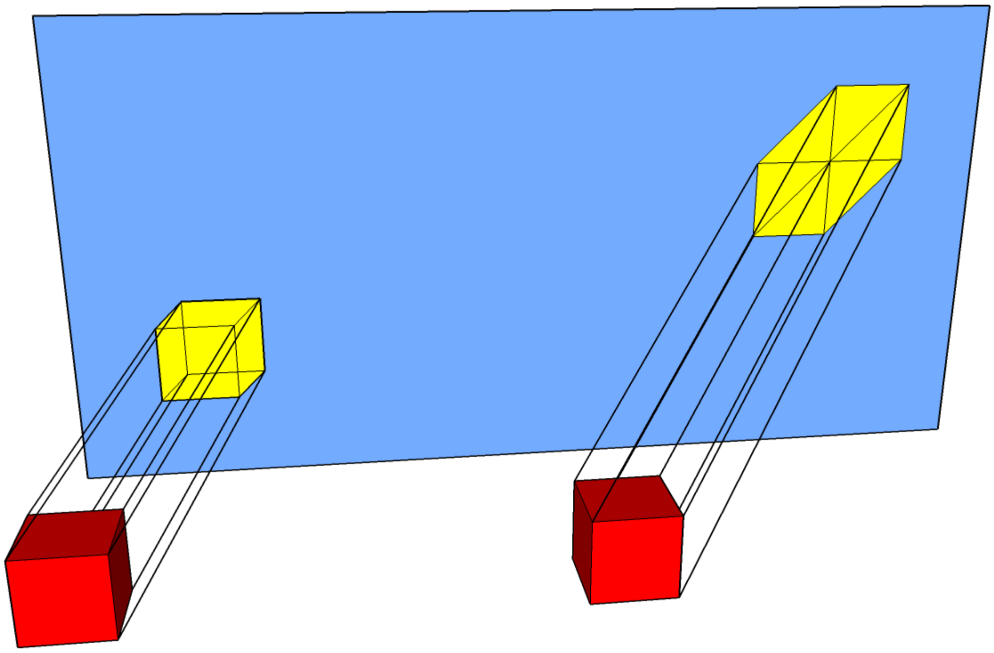

Figura 8.21 – Proyecciones planas paralelas oblicuas de reducción (izquierda) y de ampliación (derecha).

En las proyecciones planas paralelas oblicuas en las que el plano de proyección es perpendicular al plano de proyección (es el caso habitual y se supone que se construyen así a no ser que especifique lo contrario), las líneas que en la realidad sean paralelas al plano de proyección se proyectarán siempre en verdadera magnitud. Es decir, dos de las tres coordenadas del espacio se proyectan sin modificación alguna en cuanto a magnitud. Si el eje perpendicular al plano de proyección es el eje $z$, entonces las líneas paralelas al plano $xy$, se proyectarán sin deformación.

Las líneas cuya dirección sea paralela al eje perpendicular al plano sí que sufrirán, en general, una deformación. La buena noticia es que podemos calcular fácilmente (como veremos posteriormente) ese factor, y además éste no depende de la posición del objeto, y sólo depende del ángulo que formen los rayos proyectantes con el plano de proyección.

Si ese ángulo es tal, que ese factor es 1, la proyección se llama **proyección caballera**. Esto se produce cuando el ángulo entre el plano de proyección (que es perpendicular a uno de los ejes) y las rectas proyectantes es de 45°. En ella, todas las medidas del objeto se proyectan en verdadera magnitud. Los ángulos que se formen en planos paralelos al de proyección también se mantienen, pero el resto, no.

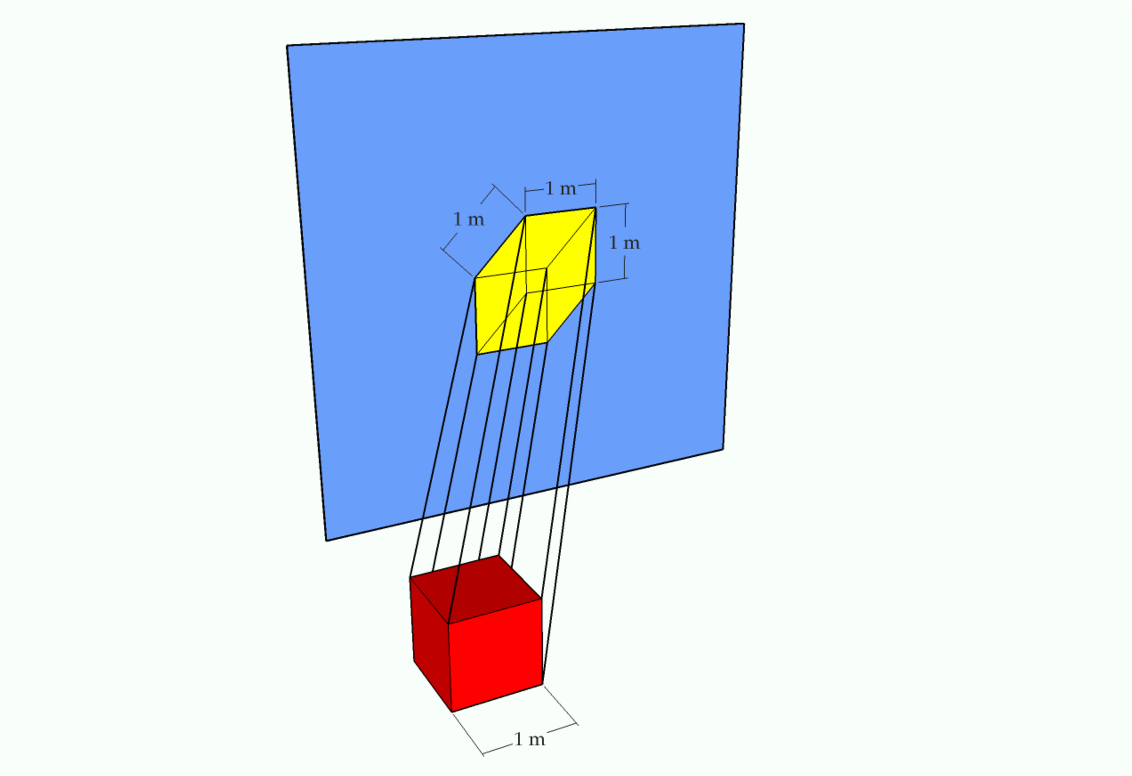


Figura 8.22 – Proyección plana paralela oblicua caballera.

Si el ángulo es tal que ese factor es 0,5 la proyección se llama **proyección cabinet**. Ello se produce cuando el ángulo que forma la dirección de proyección con el plano de proyección (que es perpendicular a uno de los ejes) es aquel cuya tangente es 2. Es decir, 63,4°.

En ella, todas las medidas del objeto paralelas al plano se proyectan en verdadera magnitud, y las que sean perpendiculares al plano se reducen a la mitad. Esto le confiere a los objetos un aspecto más realista que en la proyección caballera, dado que se produce una aparente reducción (que no es tal, ya que todas las reducciones son iguales independientemente de la distancia al plano) de tamaño de los objetos lejanos. Los ángulos que se formen en planos paralelos al de proyección también se mantienen, pero el resto, no.

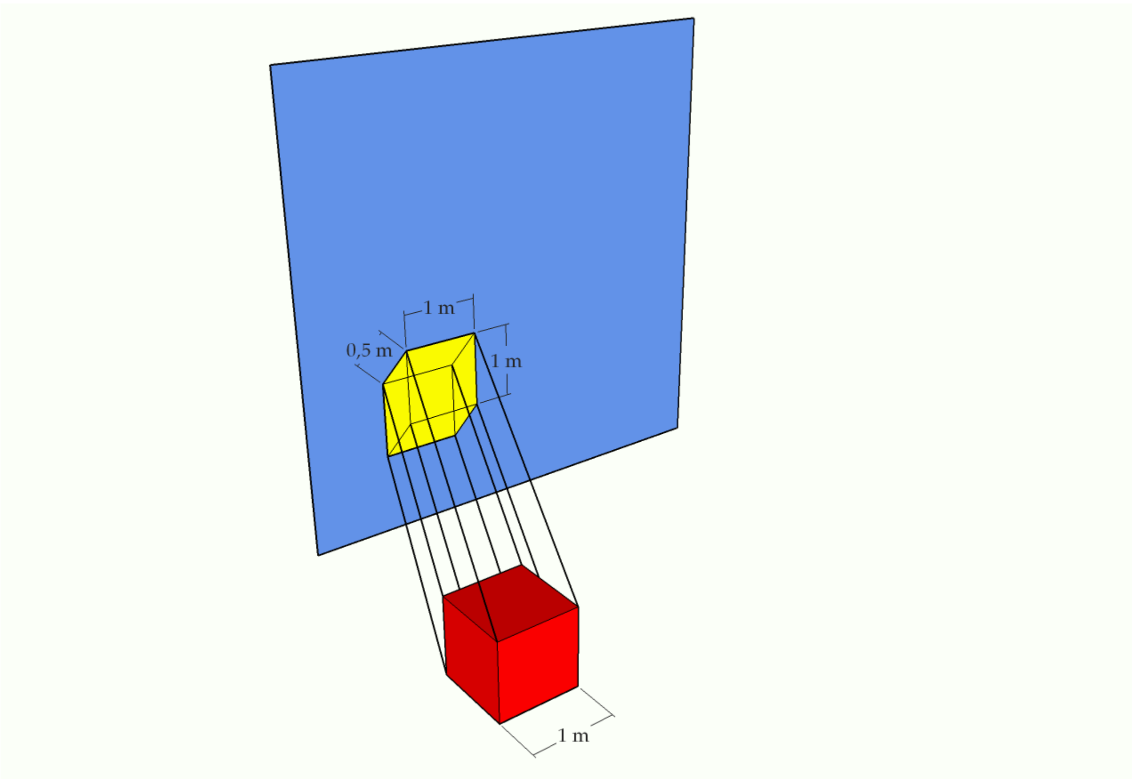


Figura 8.23 – Proyección plana paralela oblicua cabinet.

Si el plano de proyección no es perpendicular a alguno de los ejes de coordenadas, esta situación ya no se da, por lo que la relación existente entre las magnitudes proyectadas y las reales se complica algo más por la doble oblicuidad (la del plano con respecto a los ejes y la de las rectas proyectantes con respecto al plano de proyección). A este tipo de proyecciones se les llama **proyecciones planas paralelas oblicuas axonométricas**.

La oblicuidad de las rectas en las proyecciones planas paralelas oblicuas, permite que se formen proyecciones muy diferentes en función del ángulo que formen los rayos con el plano. Evidentemente, fijado un ángulo entre el plano y las rectas proyectantes, se puede cumplir esa restricción de ángulo de muchas maneras, ya que las rectas que inciden sobre un plano con el mismo ángulo forman un cono. Por tanto, todas las proyecciones oblicuas que formemos empleando direcciones de proyección que coincidan sobre la superficie del cono van a formar el mismo ángulo con el plano y van a tener propiedades similares. Lo único que cambia al elegir otra proyección "del cono" con el mismo ángulo respecto del plano, pero distinta inclinación de los rayos de proyección, es la forma en la que se genera la sensación de profundidad.

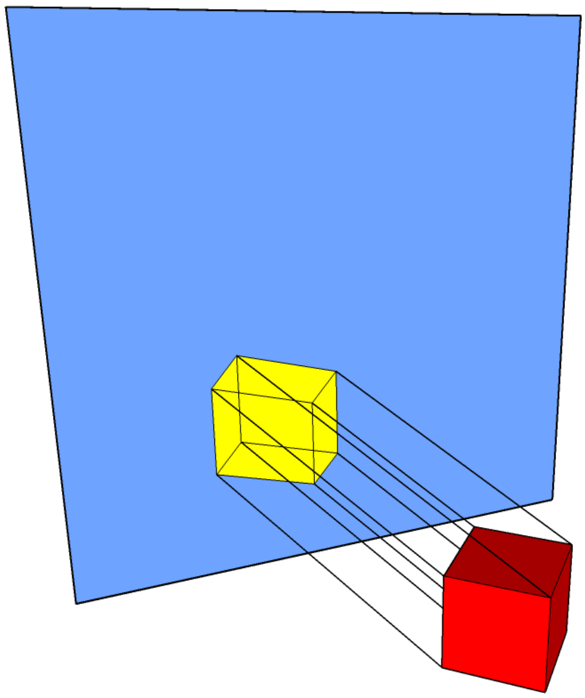

Figura 8.24 – Proyección plana paralela oblicua axonométrica.

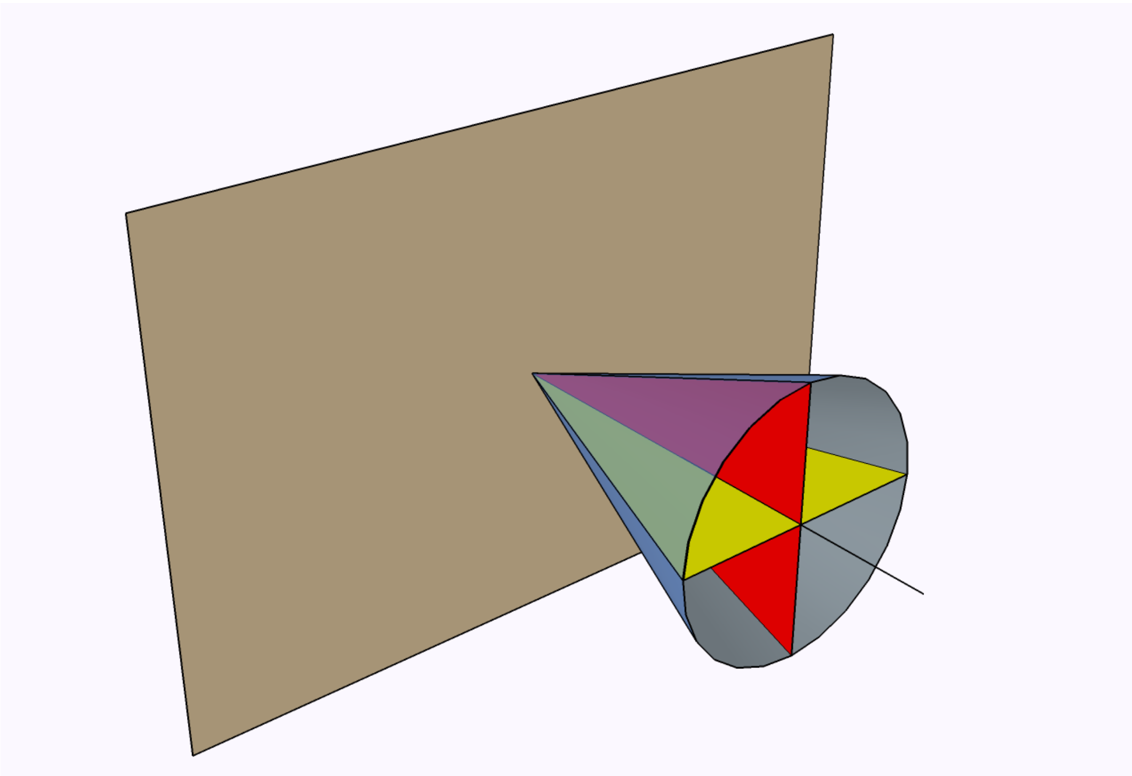

Figura 8.25 – Cono de la proyección plana paralela oblicua.

La elección de un vector dentro de ese cono hace que podamos formar proyecciones con sensación de profundidad o proyecciones en las que se pierde dicha sensación porque los rayos son completamente horizontales.

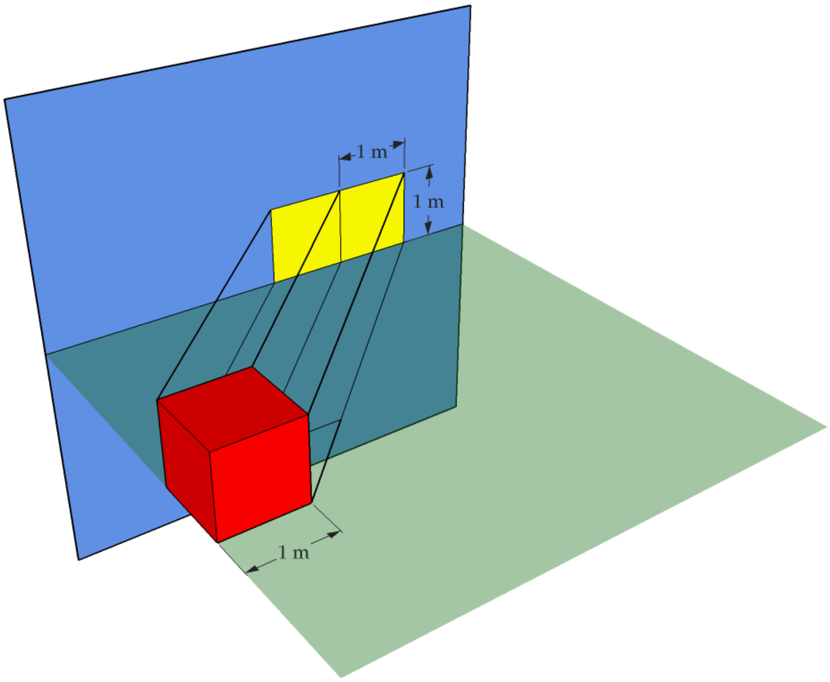


Figura 8.26 – Proyección plana paralela oblicua horizontal.

## 8.4.2 –Cálculo Analítico de Coeficientes de Reducción

Supongamos que construimos una proyección plana paralela oblicua en la que el eje $z$ marca la dirección de profundidad y el plano de proyección es perpendicular a dicho eje.

En proyecciones oblicuas no axonométricas, el cálculo de los coeficientes de reducción en la proyección de los ejes $x$ e $y$ es trivial puesto que se proyectan en verdadera magnitud. Por tanto, ambos coeficientes tendrán valor 1.

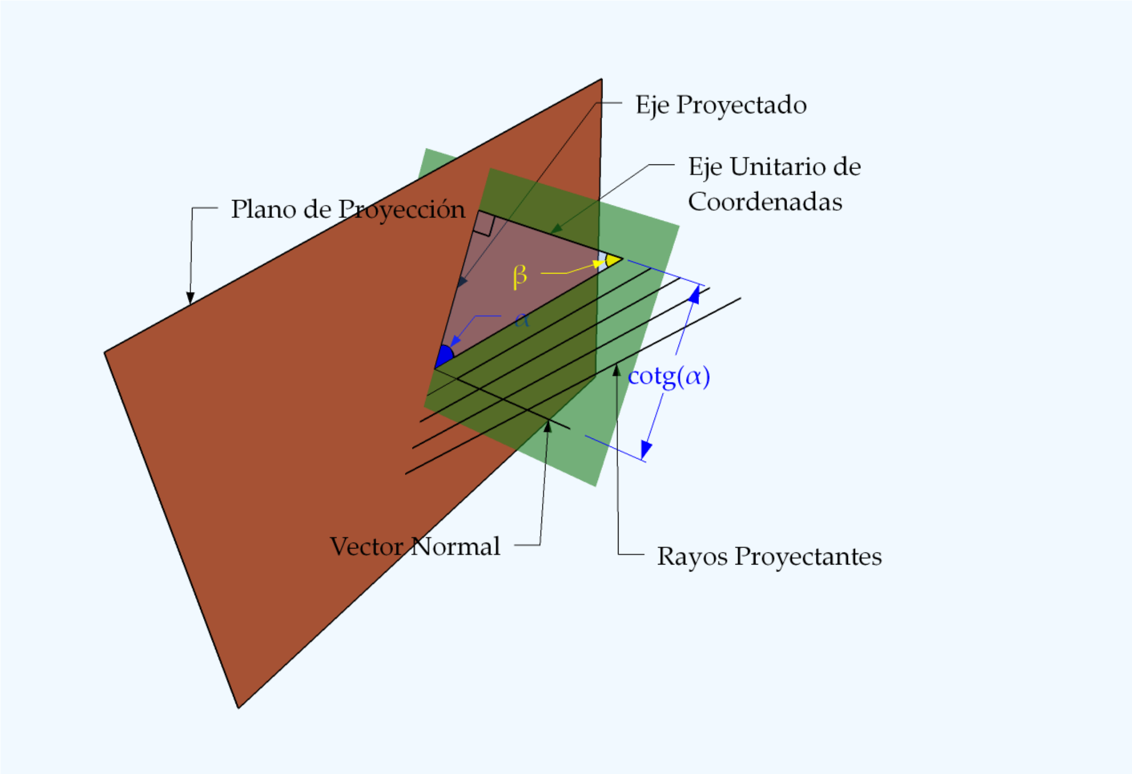


Figura 8.27 – Detalle de la proyección plana paralela oblicua
para el eje de coordenadas perpendicular al plano de proyección.

Para conocer cuál es la relación entre las magnitudes proyectadas y las reales para el eje que nos falta ($z$), procedemos de la siguiente forma:

Si llamamos $\overrightarrow{e_z}$ al vector unitario que define la dirección eje $z$,

Tendremos que:

$$(|\overrightarrow{e_z}| = 1)$$

Buscamos conocer cuál es la magnitud del vector $\overrightarrow{e_{zp}}$ (que es el resultado de proyectar el vector $\overrightarrow{e_z}$ sobre el plano con la proyección oblicua definida).

Sea $\vec{r}$ el vector que define la dirección de los rayos de proyección, sea $\pi$ el propio plano de proyección, y sea $\alpha_z$ el ángulo que forma el eje $z$ con los rayos y $\beta_z$ su complementario, entonces podemos afirmar que (por formarse un triángulo rectángulo):

$$\frac{|\overrightarrow{e_{zp}}|}{|\vec{r}|} = cos(\alpha_z) \qquad \frac{|\overrightarrow{e_z}|}{|\vec{r}|} = cos(\beta_z) = sin(\alpha_z)$$

Con lo cual:

$$\frac{|\overrightarrow{e_{zp}}|}{cos(\alpha_z)} = |\vec{r}| \qquad \frac{|\overrightarrow{e_z}|}{sin(\alpha_z)} = |\vec{r}|$$

Igualando tenemos:

$$\frac{|\overrightarrow{e_{zp}}|}{cos(\alpha_z)} = \frac{|\overrightarrow{e_z}|}{sin(\alpha_z)}$$

Por lo que la expresión final es:

$$|\overrightarrow{e_{zp}}| = |\overrightarrow{e_z}| \cdot cotg(\alpha_z) = |\overrightarrow{e_z}| \cdot tan(\beta_z)$$

Veamos cómo podemos aplicar esto a las dos proyecciones oblicuas más utilizadas:

**Proyección Caballera:**

En este caso:

$$\alpha_z = \beta_z = 45°$$

Y por tanto:

$$|\overrightarrow{e_{zp}}| = |\overrightarrow{e_z}| \cdot cotg(45°) = |\overrightarrow{e_z}| \cdot 1 = |\overrightarrow{e_z}| = 1$$

**Proyección Cabinet:**

En este caso:

$$tan(\alpha_z) = 2$$
$$tan(\beta_z) = 1/2$$

Y por tanto:

$$|\overrightarrow{e_{zp}}| = |\overrightarrow{e_z}| \cdot tan(\beta_z) = |\overrightarrow{e_z}| \cdot 1/2 = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

$$\alpha_z = 63.43°$$
$$\beta_z = 26.56°$$

## 8.5 – Sistemas de Representación

Si escogemos alguna (o varias) de las proyecciones anteriores para representar figuras tridimensionales sobre un plano, obtendremos un **sistema de representación**. Dado que las proyecciones son aplicaciones no biyectivas en las que se pierde información, es habitual combinar varias proyecciones a la hora de formar el sistema de representación.

Dependiendo del tipo o tipos de proyecciones que usemos, tendremos un sistema de representación u otro Naturalmente, dependiendo del objetivo del sistema de representación (arquitectura, ingeniería, arte, etc.) emplearemos un sistema diferente, buscando siempre que las propiedades de ese sistema sean las adecuadas a nuestra aplicación

### 8.5.1 –Sistema Diédrico

El **sistema diédrico** emplea dos proyecciones planas paralelas ortogonales, (normalmente alzado y planta) de manera simultánea. Estas proyecciones tienen la ventaja de conservar distancias, pero tienen el inconveniente de que las caras perpendiculares a ambos planos de proyección (perfiles) se proyectan en una recta, con lo que hay ambigüedad. Dicha ambigüedad se resuelve habitualmente proporcionando una tercera vista (la de perfil normalmente).

La forma más compacta de representar el sistema diédrico es mediante una proyección de alzado (sobre un **plano vertical**, PV) y una proyección de planta (sobre un **plano horizontal**, PH). Para formar una única representación bidimensional, la representación generada sobre el plano horizontal se abate (gira) 90º hasta hacerla coincidir con el vertical, dibujando una línea que se llama **línea de tierra** (LT) en la intersección de ambos planos para poder saber dónde se ha producido el abatimiento. De esta manera, tendremos representado el espacio tridimensional sobre un único plano (aunque con dos proyecciones mezcladas).

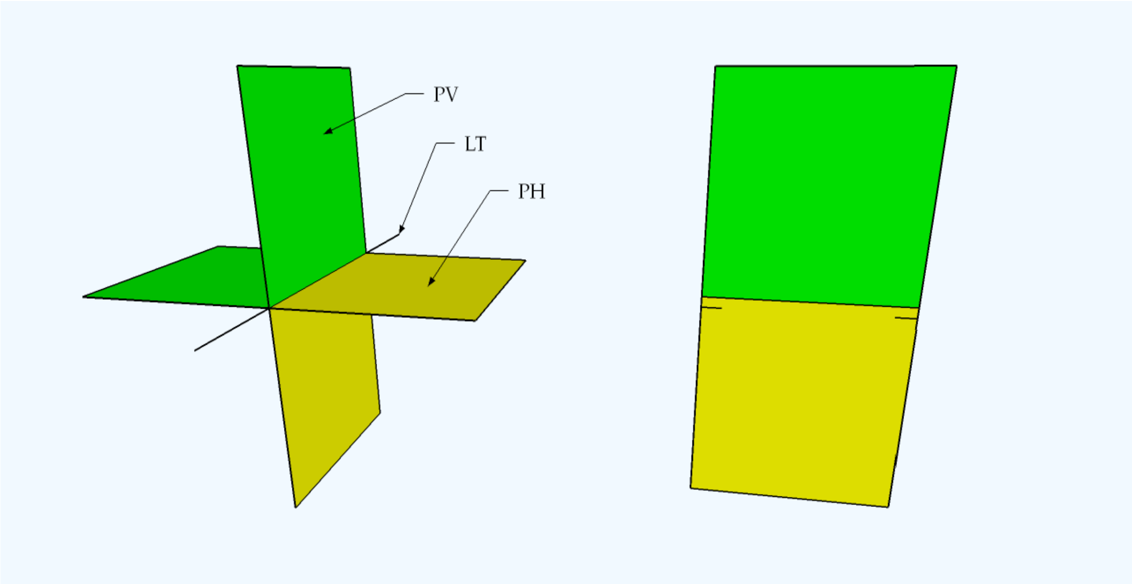


Figura 8.28 – Planos del sistema diédrico.

Con esta representación, la proyección de un punto en el sistema diédrico dependerá de su altura sobre el plano horizontal, a la que se llama **cota**, y de la distancia al plano vertical, a la que se llama **alejamiento**.

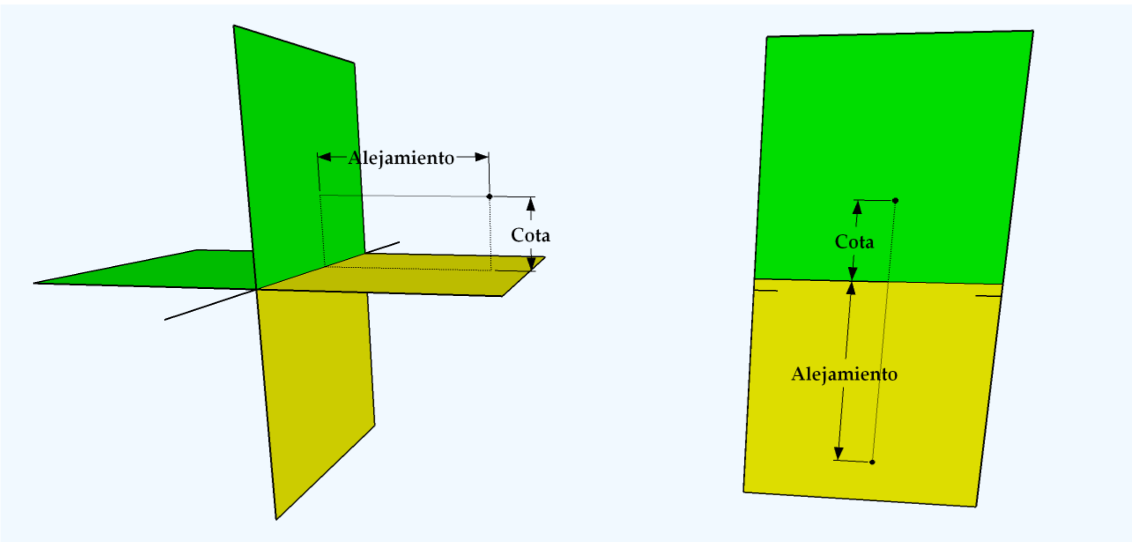


Figura 8.29 – Cota y alejamiento en el sistema diédrico.

Con esta representación, cada punto es representado mediante dos puntos que marcan la cota y alejamiento. La representación de un punto es diferente según el cuadrante que ocupe con respecto a PH y PV. Los puntos situados sobre dichos planos de proyección tienen una de sus proyecciones situada sobre la línea de tierra.

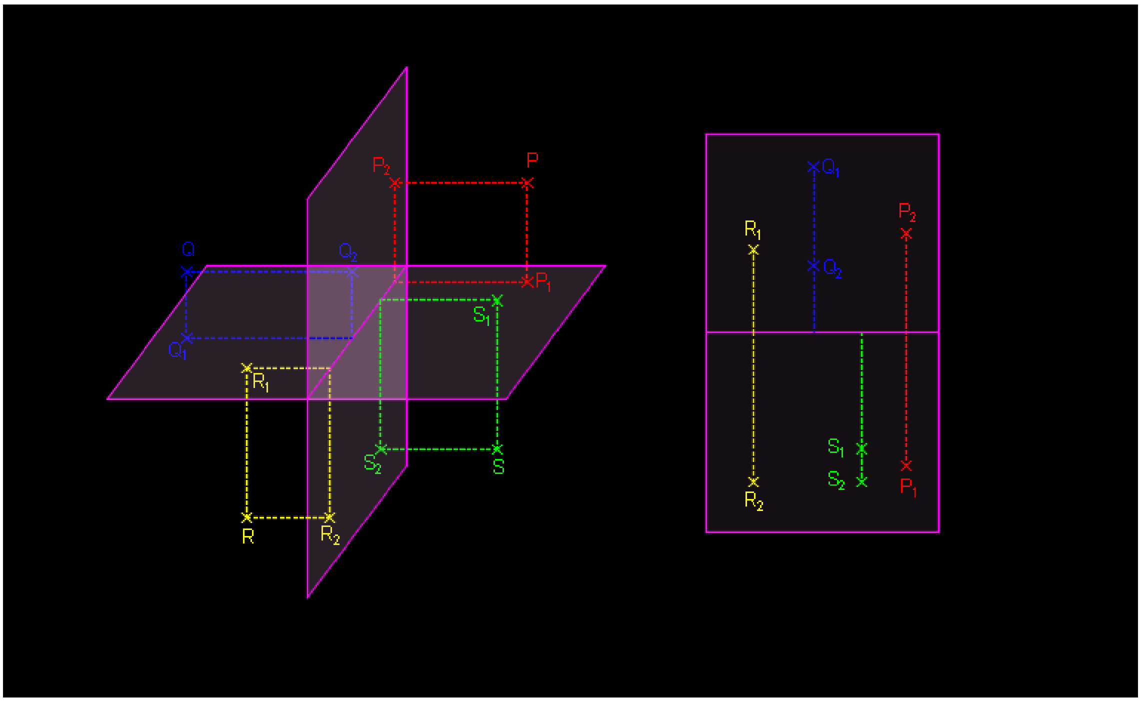


Figura 8.30 – Representación diédrica de un punto en los distintos cuadrantes.

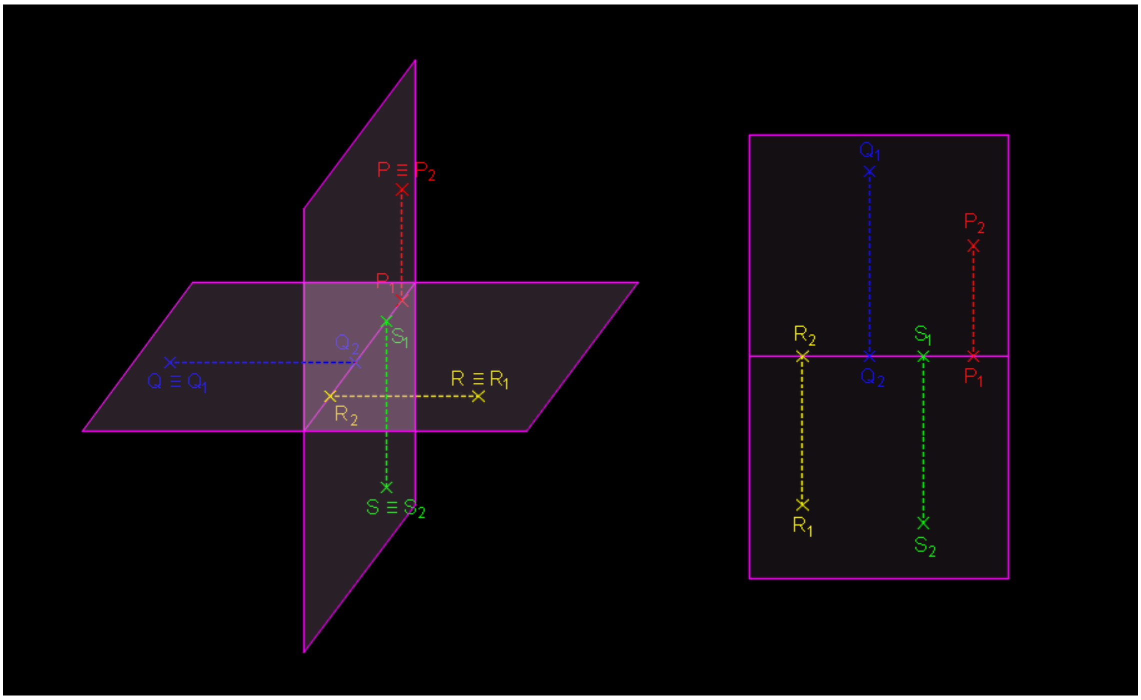


Figura 8.31 – Representación diédrica de un punto que pertenezca a alguno de los planos de proyección.

Para representar un segmento de una recta se representan sus extremos mediante dos puntos cada uno, de modo que uniendo dichos extremos dos a dos, obtenemos dos segmentos proyectados sobre PH y PV que son la representación diédrica de dicho segmento.

La representación de caras se realiza de modo similar, con la particularidad de que todas las caras que sean perpendiculares a PH y a PV se representan en una misma recta, por lo que perdemos toda aquella información de profundidad en el eje de perfil.

Como vemos, no es esta una representación muy natural, dado que el no disponer de vista de perfil nos limita bastante. La situación se complica cuando se trata de representar figuras con caras perpendiculares a los planos de proyección, ya que éstas no se apreciarán adecuadamente.

Además, el abatimiento del plano horizontal sobre el vertical no genera una vista intuitiva de la forma de la figura, ya que la representación depende del cuadrante en el que se situe cada vértice de la pieza. Es posible realizar mediciones y es un sistema muy compacto, pero no es la mejor manera de hacerse una idea rápida de la forma de una figura.

### 8.5.1.1 – Sistema Diédrico con Vista de Perfil

Aunque el sistema diédrico compacto (sin vista de perfil) que hemos visto, es utilizado en algunas ocasiones y es estudiado en las escuelas de arquitectura, no es el más adecuado para representar piezas complejas puesto que la información de perfil se pierde completamente.

Es por ello que al sistema diédrico se le añade una tercera proyección plana ortogonal utilizando un plano de perfil (PP), que es perpendicular a PH y a PV. Esto permite reconstruir la forma de la figura de una forma más sencilla, sin impedir realizar medidas sobre ella de manera exacta. A pesar de que ya no se usan dos vistas sino tres, se sigue denominando sistema diédrico.

Es posible incluso emplear hasta seis proyecciones diferentes: alzado frontal (o anterior), alzado posterior (o trasero), planta superior, panta inferior, perfil derecho y perfil izquierdo. Sin embargo, con tres vistas (un alzado, una planta y un perfil) suele ser suficiente.

Lo habitual es situar la figura y representar cada vista (alzado, planta, perfil) de forma separada, abatiéndolas sobre un mismo plano de forma que sea sencillo establecer correspondencias entre los puntos proyectados y reconstruir de qué vértice provienen.

En Europa, se situa habitualmente la **pieza en el primer cuadrante**, y la disposición de las vistas suele ser: alzado frontal, perfil izquierdo situado a la derecha de la vista de alzado, y planta superior situada debajo justo de la vista de alzado. A este sistema se le llama **sistema diédrico europeo**. Se pueden dibujar las otras tres vistas, pero no aportan demasiada información ya que siempre son simétricas con respecto a las tres anteriores. Si se dibujan, se hacen en esta disposición: perfil derecho a la izquierda del alzado, planta inferior arriba del alzado, y alzado posterior a la derecha del perfil izquierdo.

En Norteamérica, se situa habitualmente la pieza en el tercer cuadrante y la disposición de la vistas suele ser: alzado frontal, perfil izquierdo situado a la izquierda de la vista de alzado, planta superior situada arriba justo de la vista de alzado, perfil derecho situado a la derecha del alzado, planta inferior situada debajo justo del alzado, y alzado posterior situado a la derecha del perfil derecho. A este sistema se le llama **sistema diédrico americano**.

Es importante entender que **la representación de una pieza con el sistema europeo o con el americano es exactamente la misma.** Lo único que cambia es la disposición de las vistas. La distinción entre un sistema y otro es meramente formal, ya que a efectos prácticos sólo cambia la manera de ordenar las diferentes vistas. En el sistema europeo se entiende que la pieza está situada entre el observador y el plano de proyección, mientras que en el sistema americano se supone que es el plano de proyección el que está situado entre el observador y la pieza. Es por ello que, aunque en el europeo la pieza se situa en el primer cuadrante y en el americano en el tercero, las representaciones obtenidas son exactamente las mismas.

En ambos casos, cuando una arista queda oculta tras una cara y no es visible al proyectar, pero lo sería si no estuviera tapada por dicha cara, se suele indicar la proyección de la arista oculta con una línea discontinua.

El sistema diédrico con vista de perfil es más intuitivo que el compacto sin perfil y con línea de tierra, aunque sigue siendo a veces poco claro para apreciar la forma de una figura, a poco que esta sea medianamente compleja. Es un sistema extremadamente útil para realizar mediciones, pero no es lo suficientemente realista para hacer descripciones rápidas de piezas que estén orientadas a explicar la forma de la figura, ya que el cerebro no es capaz de inferir de manera inmediata la forma de la figura a partir de estas tres vistas.

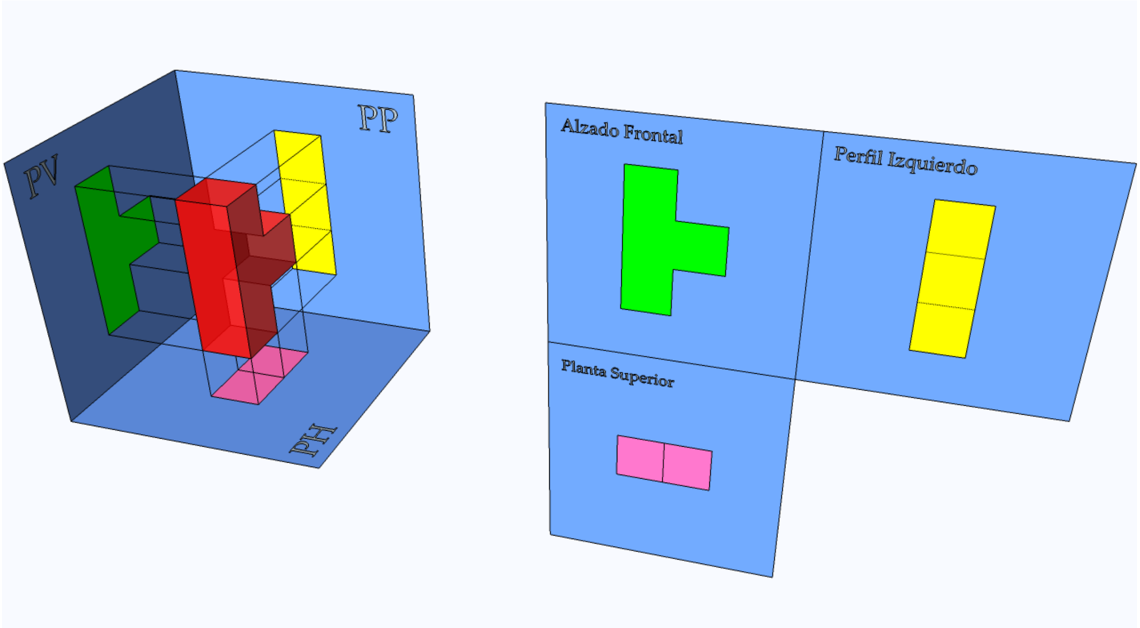


Figura 8.32 – Sistema diédrico europeo.

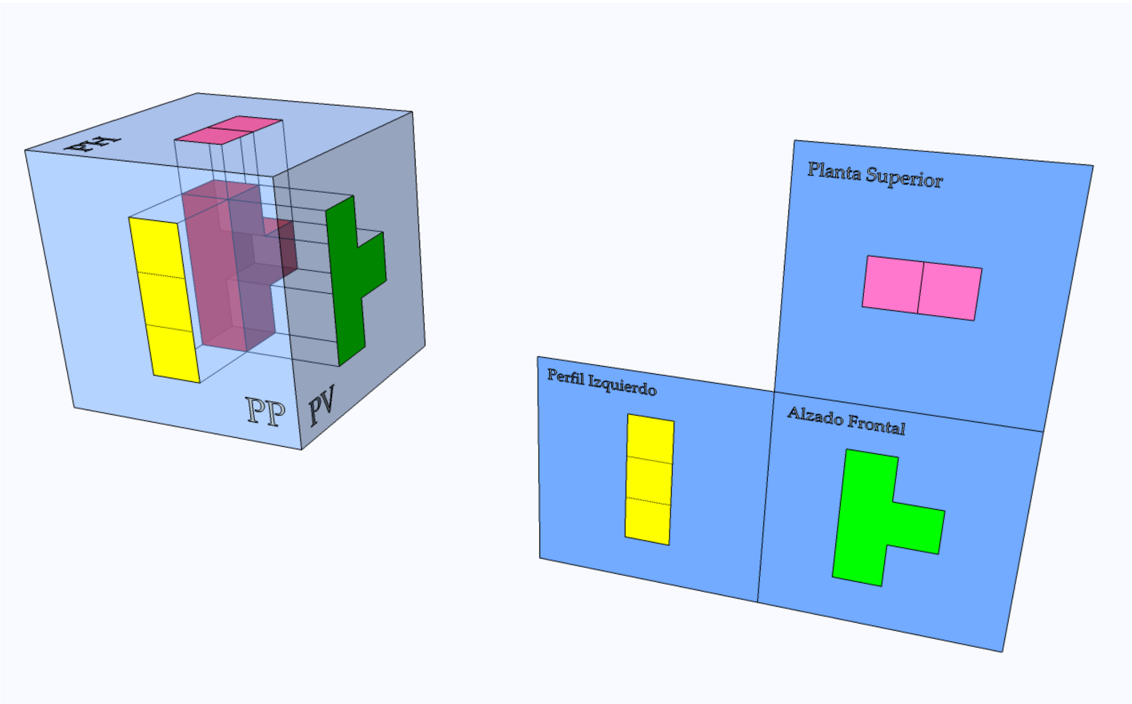


Figura 8.33 – Sistema diédrico americano.

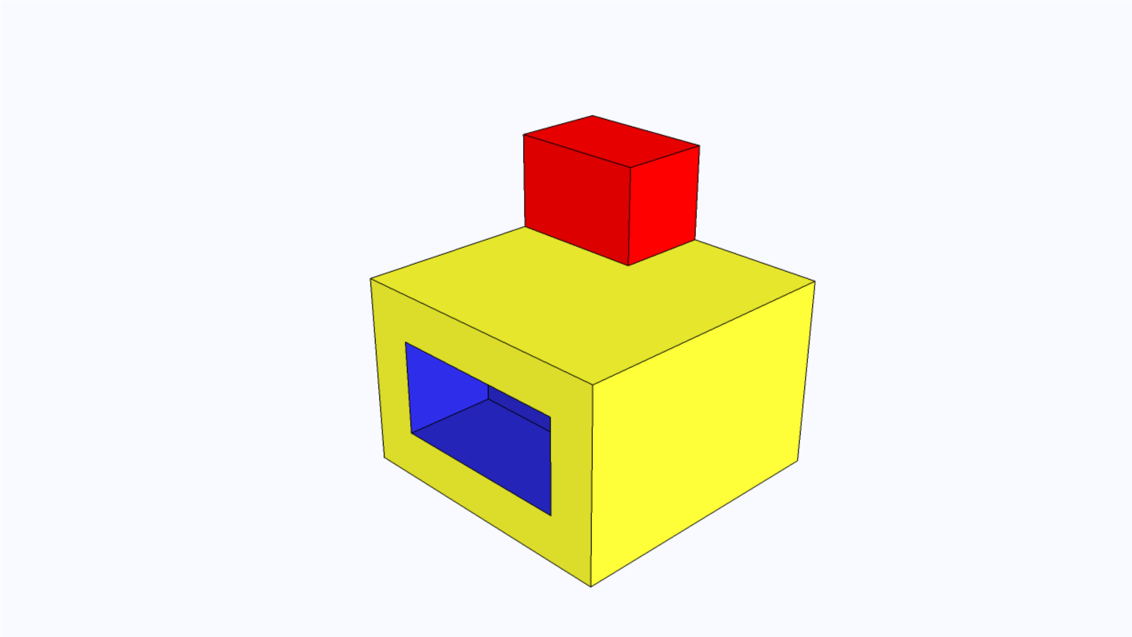

Figura 8.34a – Pieza tridimensional.

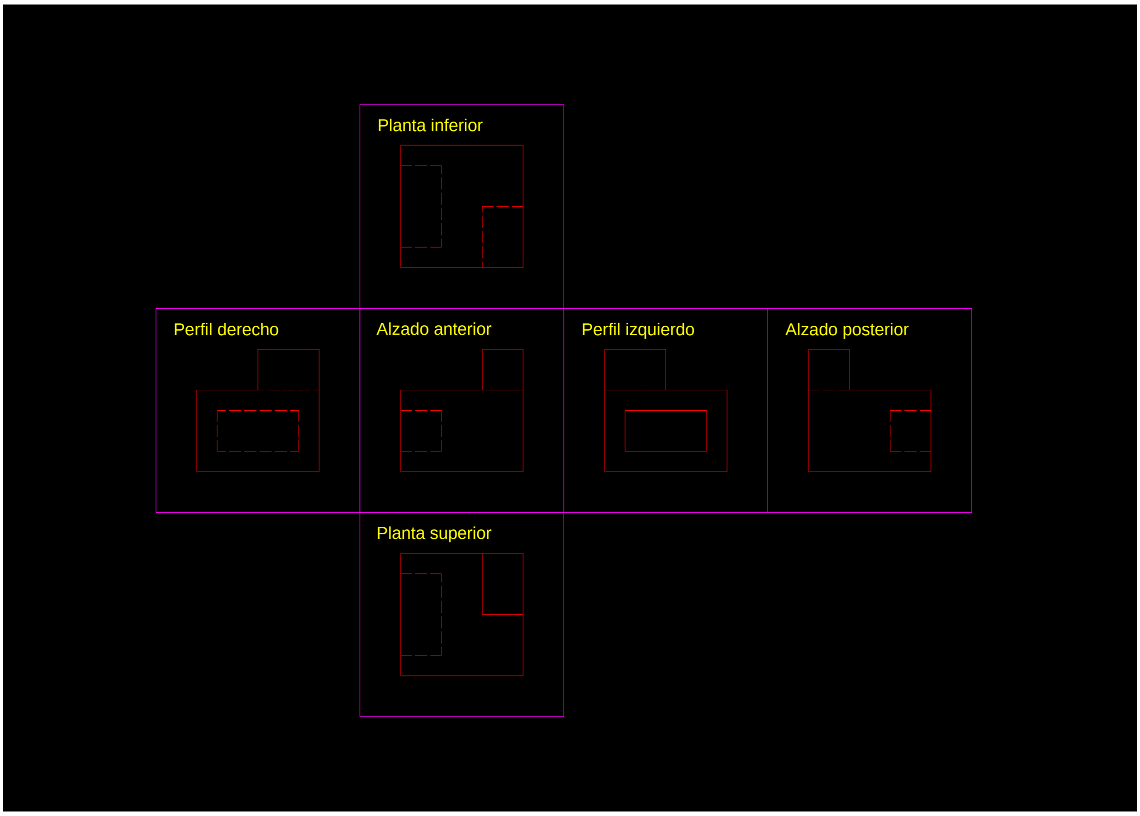


Figura 8.34b – Pieza representada con sistema diédrico europeo.

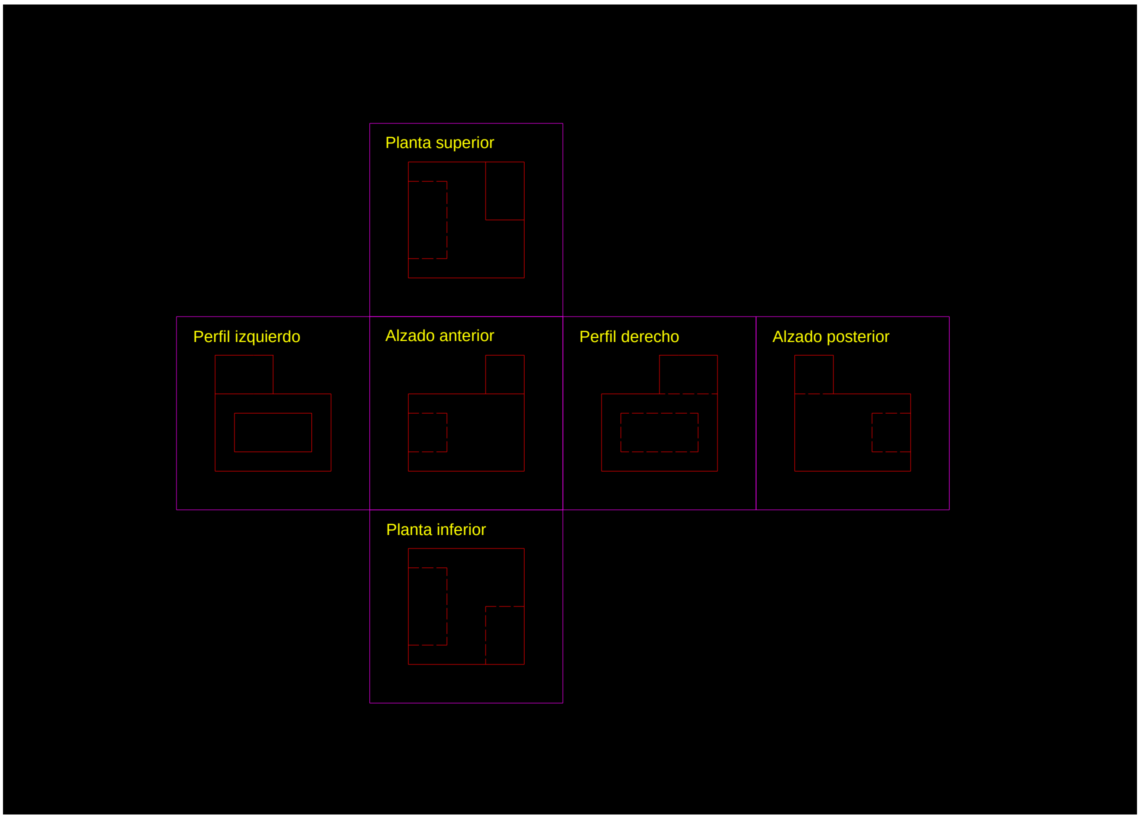


Figura 8.34c – Pieza representada con sistema diédrico americano.

## 8.5.2 – Sistema de Planos Acotados

El **sistema de planos acotados**, también llamado **sistema de curvas de nivel**, utiliza un solo tipo de proyección: la proyección plana paralela ortogonal (normalmente de planta), pero indicando las cotas (o alturas) sobre el dibujo. Estas cotan vienen a suplir la falta de información vertical que se da al utilizar proyecciones de planta.

Es un sistema de representación que se utiliza fundamentalmente en mapas topográficos para representar terrenos montañosos. Las cotas se espacian a intervalos constantes de forma que las distancias entre las curvas de nivel de la proyección dan una idea de la pendiente (a menor distancia más pendiente) del terreno. De modo que es como si realizáramos cortes del terreno cada cierto número de metros y los dibujáramos todos juntos en una misma hoja.

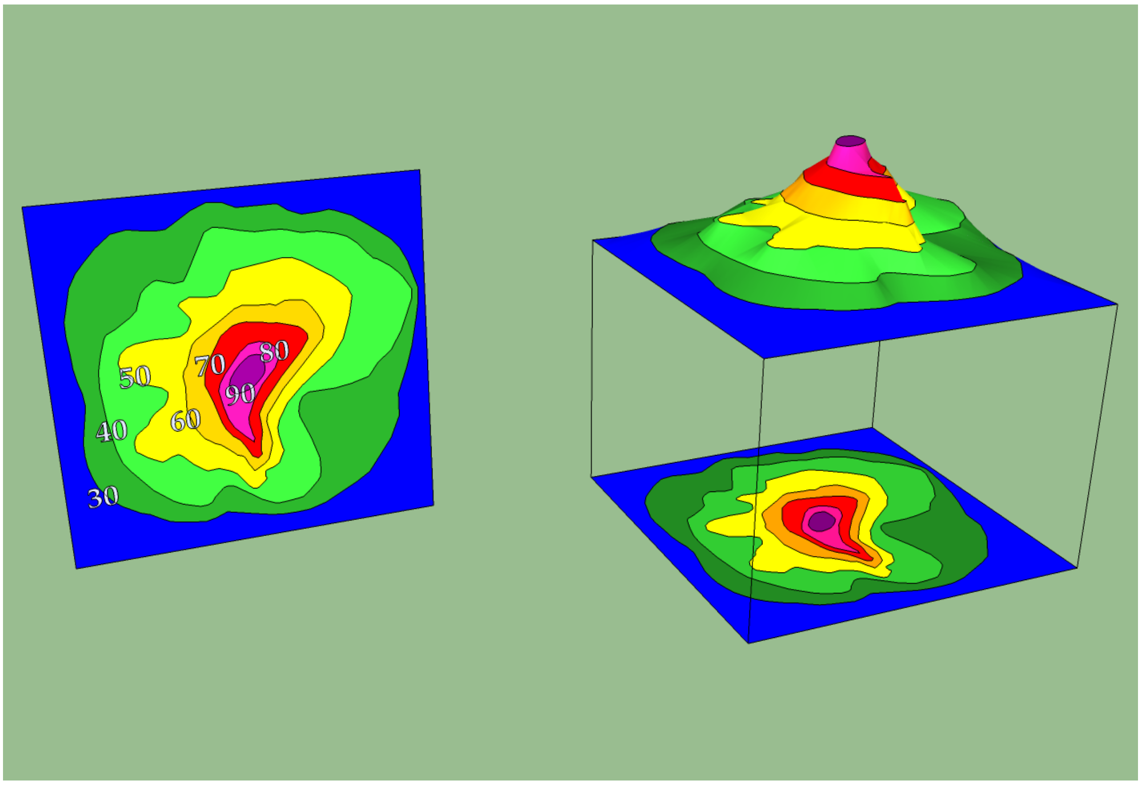


Figura 8.35 – Sistema de planos acotados.

## 8.5.3 – Sistema Axonométrico Ortogonal

Si empleamos una proyección en la que el plano de proyección no es paralelo a ninguno de los ejes de coordenadas, se habla de representación o **sistema axonométrico**.

Si las proyectantes son perpendiculares al plano de proyección, se llama axonometría ortogonal (es la más usada). Si las proyectantes no son perpendiculares al plano de proyección, se llama axonometría oblicua.

El **sistema axonométrico ortogonal** es probablemente, junto con el diédrico con perfil, el más empleado en ingeniería. Se basa en realizar una única proyección plana paralela ortogonal axonométrica, y representar con ella la figura.

Normalmente se emplea una proyección isométrica, puesto que es la más sencilla de realizar. Para ello, se dibujan tres segmentos de longitud igual y conocida que partan de un punto común y que formen 120º entre ellos. Ello definirá un triángulo equilátero cuyo ortocentro será el punto común de los segmentos.

Dicho punto común representará la proyección del centro del sistema de coordenadas. Cada uno de los segmentos representará la proyección de cada uno de los tres ejes de coordenadas. Si realizamos una marca al final de cada segmento indicando que cada uno de esos segmentos representa una unidad, prolongamos dichos segmentos en la dirección que señalan, y realizamos sucesivas marcas al final de cada uno, obtendremos las proyecciones sobre los ejes de coordenadas de los puntos múltiplos de la unidad que pertenecen a los ejes de coordenadas.

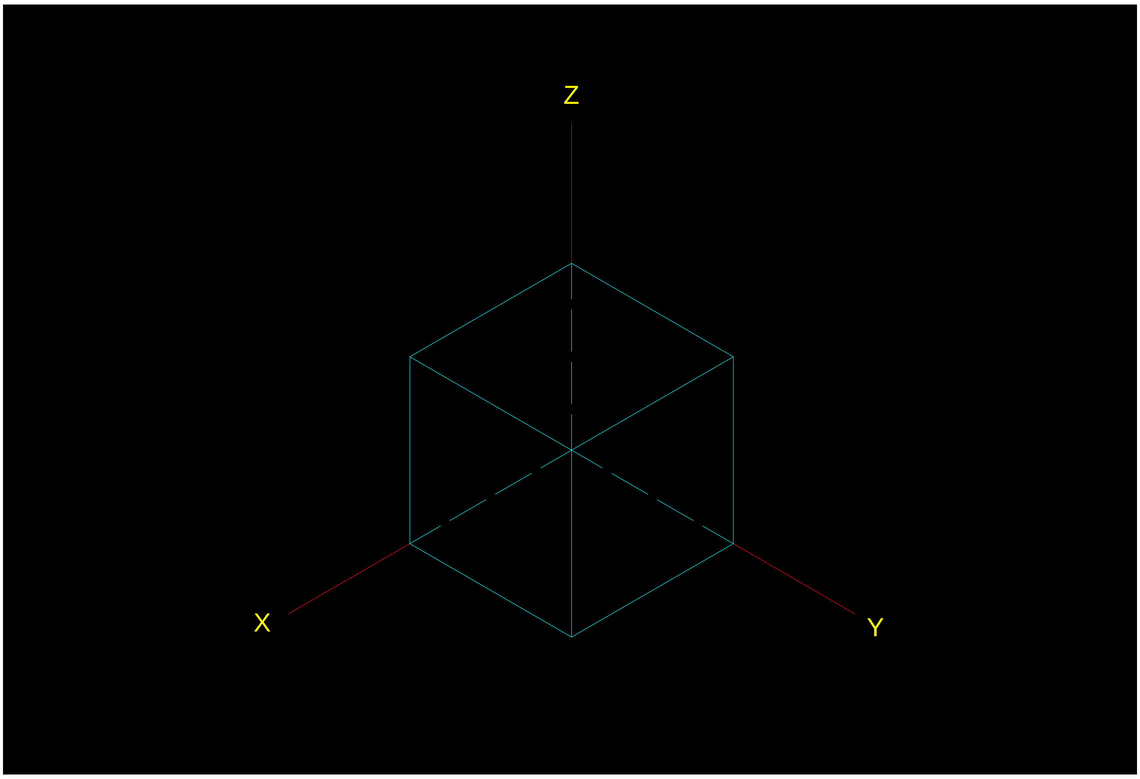


Figura 8.36 – Representación mediante proyección isométrica.

Trazando rectas paralelas a cada eje de coordenadas por los puntos marcados previamente, obtendremos una rejilla en forma de colmena que nos permitirá proyectar fácilmente cualquier punto de $R_3$ en $R_2$ haciendo uso de nuestra proyección isométrica.

Si por ejemplo queremos proyectar el punto (3, -5, 2), sólo tendremos que movernos 3 marcas de rejilla en la dirección del eje $x$, 5 marcas en dirección contraria (por el signo negativo) a la que marca el eje $y$, y 2 marcas en la dirección que marca el eje $z$. Además, podremos comprobar que los puntos que pertenezcan una misma línea que sea perpendicular al plano de proyección se proyectarán sobre el mismo punto. Por ejemplo: (1, 1, 1) y (2, 2, 2), ya que ambos se proyectarán sobre el punto (0, 0, 0).

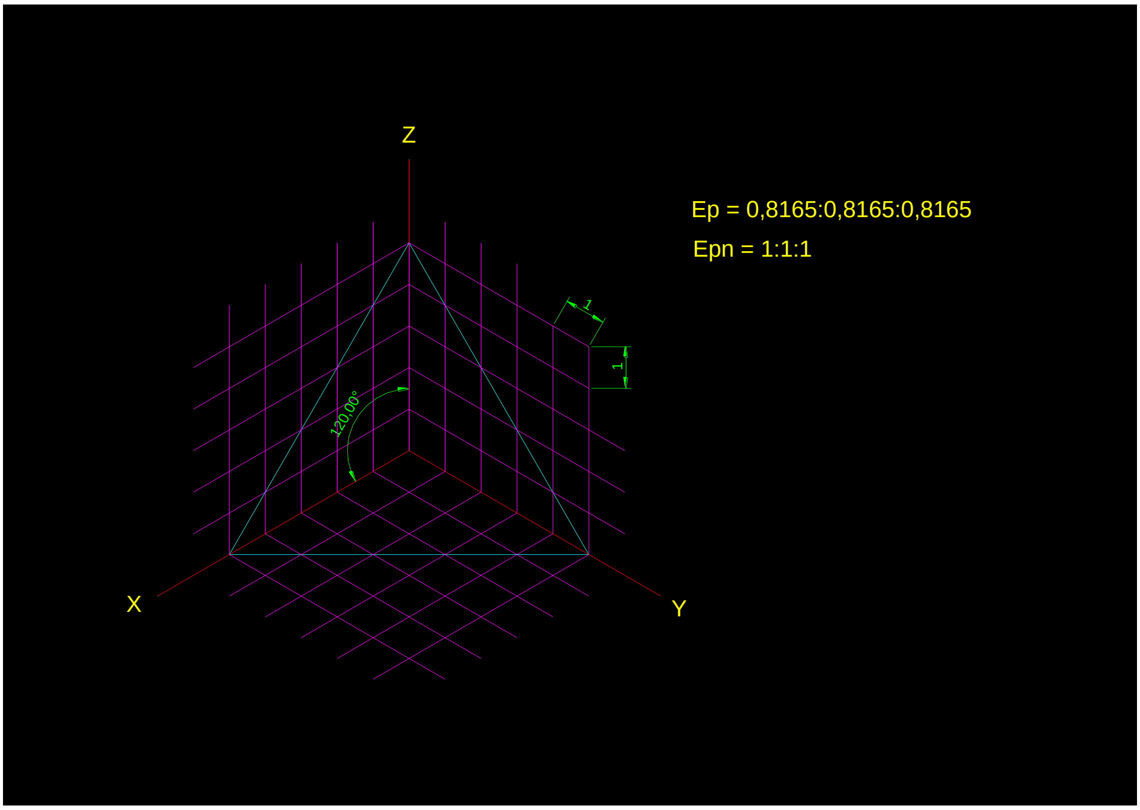


Figura 8.37 – Rejilla isométrica.

Lo que represente cada marca en la realidad puede ser diferente y dependerá de la escala a la que se haya trazado el dibujo. El factor 0,8165 puede ser ignorado o incluido en la escala del dibujo.

También se pueden utilizar proyecciones dimétricas o trimétricas, dado que la proyección isométrica en algunos casos resulta un tanto artificial. La construcción será similar, sólo que los ángulos no serán de 120º entre los ejes, y las distancias al proyectarse cambiarán para cada eje según lo que indiquen sus factores de reducción. Es por ello que habremos de tener en cuenta tanto la escala del dibujo como la escala de proyección (o la escala de proyección normalizada si lo único que nos importa es la relación entre los ejes al proyectarse).

Al sistema de representación basado en proyección axonométrica se le conoce a veces con el (confuso) nombre de **perspectiva axonométrica**.

## 8.5.4 – Otros Sistemas

Dado que el sistema axonométrico ortogonal no siempre proporciona una sensación realista, se pueden emplear otros sistemas de proyección que generen representaciones más realistas, intentando al mismo tiempo no perder la capacidad de realizar mediciones sobre los elementos proyectados.

Si empleamos una proyección plana perspectiva tendremos un sistema de representación perspectiva. A veces se le llama **perspectiva cónica**. El incoveniente de este sistema es que, al emplear una proyección perspectiva, la capacidad de realizar mediciones de forma sencilla sobre los elementos proyectados, se pierde.

Si empleamos una proyección plana paralela oblicua caballera, tendremos un sistema de representación caballera, que a veces recibe el (confuso) nombre de **perspectiva caballera**. Aunque no es una proyección perspectiva, se le llama perspectiva porque da un aspecto parecido al realista (aunque falso porque los objetos lejanos no se empequeñecen). La ventaja de este sistema de representación es que no necesitamos realizar conversiones al realizar medidas sobre los elementos proyectados, ya que estos se proyectan en verdadera magnitud en las tres direcciones del espacio.

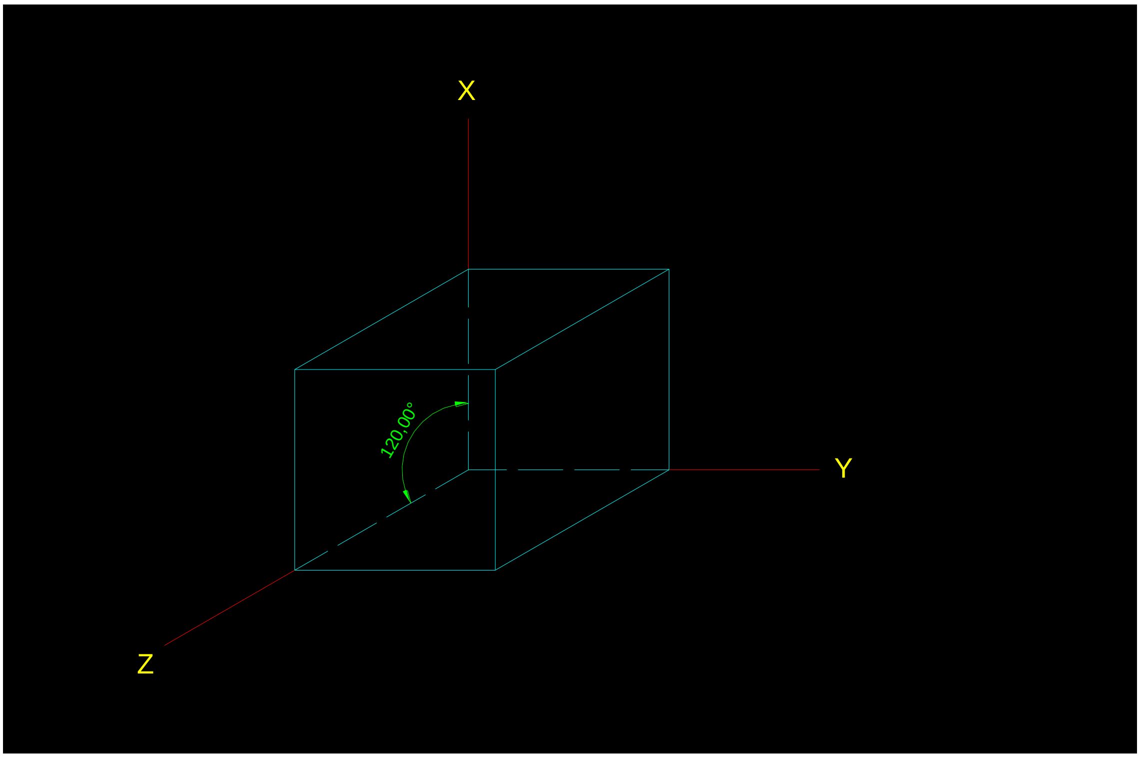

Figura 8.38 – Representación mediante proyección caballera con ángulo entre los ejes $x$ y $z$ de 120º.

Igualmente, el empleo de la proyección plana paralela oblicua cabinet da lugar el sistema de representación cabinet o **perspectiva cabinet**. Este sistema de representación proporciona un aspecto más realista que el sistema de representación caballera, y además, sigue siendo sencillo realizar mediciones sobre los elementos proyectados, por lo que es unos de los sistemas más convenientes para realizar descripciones de piezas en ingeniería.

Tanto en el sistema de representación caballera como en el cabinet tenemos una cierta libertad para formar la proyección. La proyección comienza dibujando dos segmentos que partan de un mismo punto y formen 90º entre ellos. Ambos representarán la proyección de las direcciones que son paralelas al plano de proyección y que por tanto se proyectan en verdadera magnitud. El tercer segmento partirá del punto común a los otros dos, y formará un cierto ángulo con los otros dos. Ese ángulo lo podemos elegir arbitrariamente y lo único que cambiará es la forma en la que inferiremos la profundidad. Si empleamos la representación caballera ese segmento será de la misma longitud que los otros dos. Si empleamos la cabinet, será de una longitud igual a la mitad que los otros dos, indicando que, en la dirección de profundidad, la proyección reduce las longitudes de los segmentos a la mitad. Aplicando las mismas reglas que para la rejilla axonométrica, podremos formar la rejilla caballera o cabinet, aunque en este caso la rejilla sólo nos servirá para proyectar puntos situados sobre los planos coordenados. El resto de puntos se pueden proyectar midiendo distancias por semejanza entre puntos de la rejilla.

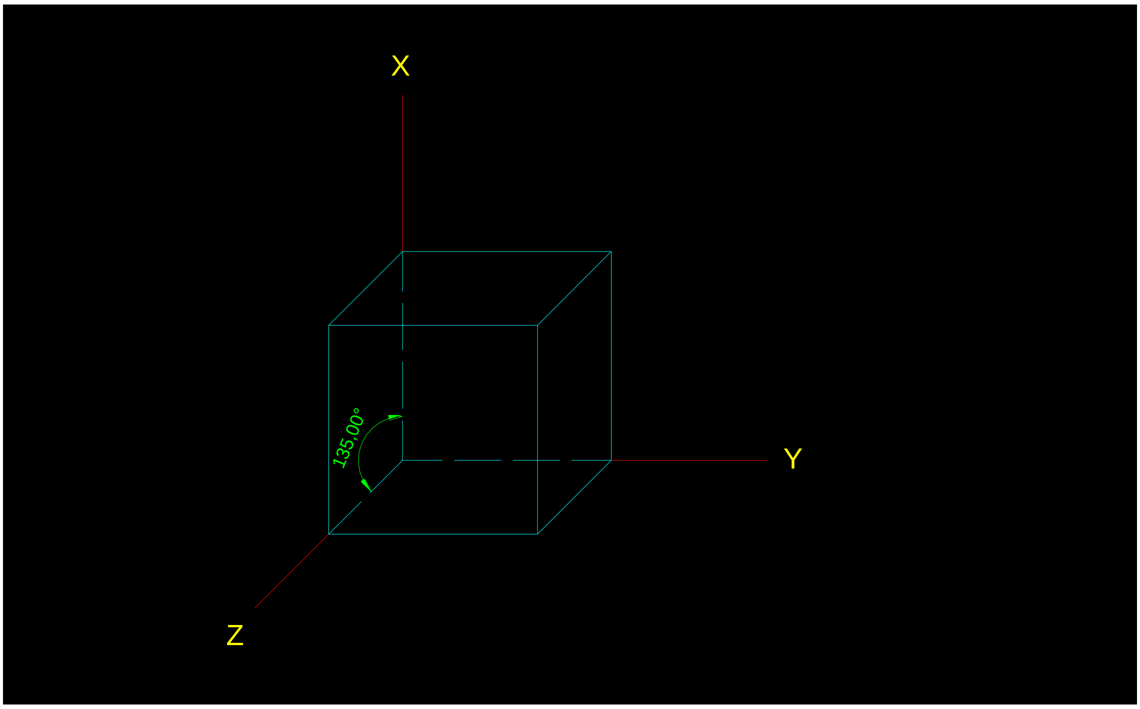


Figura 8.39 – Representación mediante proyección cabinet

con ángulo entre los ejes $x$ y $z$ de 135º.

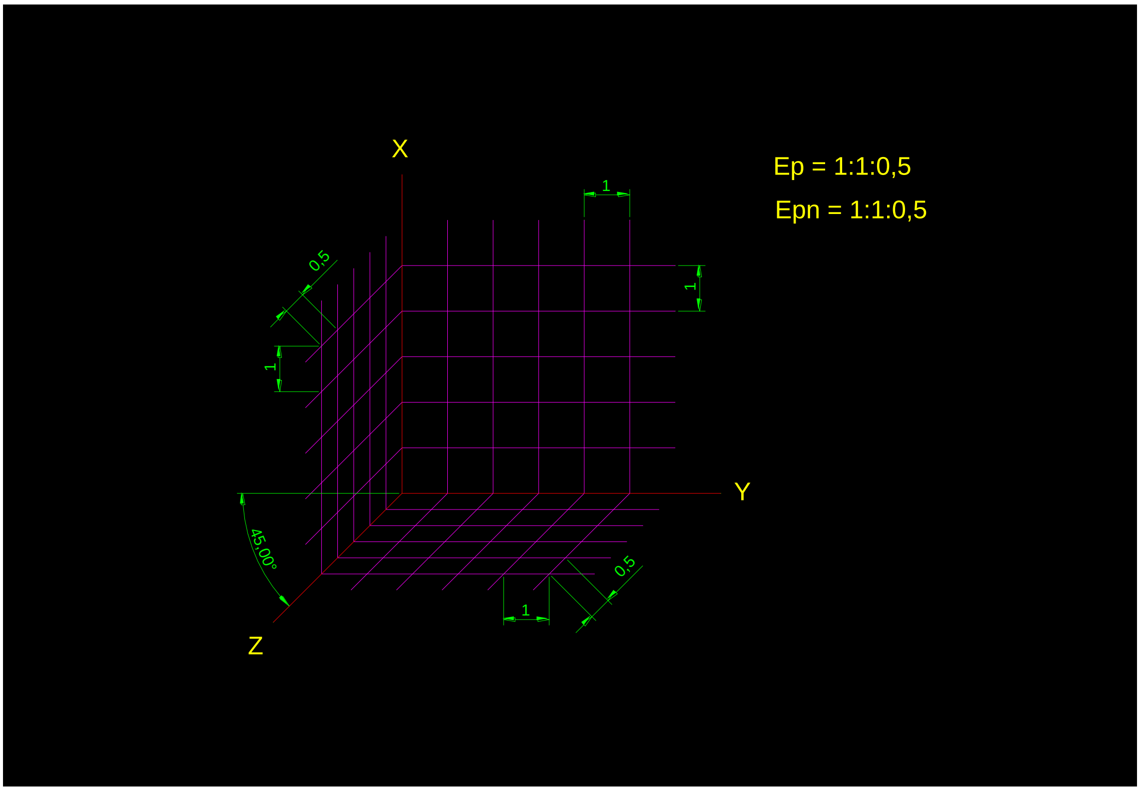


Figura 8.40 – Rejilla cabinet con ángulo entre los ejes $x$ y $z$ de 135º.

También pueden construirse otros sistemas de representación, utilizando otras proyecciones paralelas oblicuas distintas a la caballera o cabinet. Y también podemos formar un sistema de representación axonométrico oblicuo si empleamos una proyección plana paralela oblicua axonométrica, aunque los sistemas más empleados son los anteriormente citados.

## 8.5.5 – Comparativa de Sistemas de Representación

Listamos a modo de resumen las propiedades de los diversos sistemas de representación en la siguiente tabla.

| Sistema | Realismo de la Representación | Facilidad Medición sobre la Proyección | Dificultad en la Creación |
|---|---|---|---|
| **Perspectiva Cónica** | Alto | Baja | Alta |
| **Diédrico** | Bajo | Alto | Media |
| **Diédrico + Perfil** | Bajo/Medio | Alto | Media |
| **Axonométrico Ortogonal** | Medio | Alto | Baja |
| **Axonométrico Oblicuo** | Medio | Medio | Media |
| **Perspectiva Caballera** | Medio | Alto | Baja |
| **Perspectiva Cabinet** | Medio/Alto | Alto | Baja |
| **Planos Acotados** | Bajo | Medio | Media |

Tabla 8.1 – Compendio de los diferentes sistemas de representación.