Tema 7

Cónicas y Curvas Técnicas Planas

Además de la circunferencia, que es sin duda la curva más conocida y utilizada, existen otros muchos tipos de curvas. En este tema vamos a realizar un repaso rápido a los tipos de curvas más conocidos y utilizados habitualmente: las curvas técnicas y las curvas cónicas. Veremos que, en realidad, la circunferencia es un caso particular de curva cónica.

7.1 – Curvas Técnicas

Llamamos **curvas técnicas** a una serie de curvas que son muy utilizadas en ingeniería y en arquitectura y que son sencillas de construir, ya que están formadas por **arcos de distintas circunferencias unidos entre sí mediante tangencias**.

Las curvas técnicas más conocidas son el óvalo, el ovoide, y la espiral.

El **óvalo** es una curva cerrada y plana compuesta por un número par (normalmente cuatro) de arcos de circunferencia enlazados entre sí por tangencias y simétricos respecto de sus ejes mayor y menor, que a su vez son perpendiculares entre sí. Un óvalo de cuatro circunferencias se asemeja mucho a una elipse, pero no es una elipse, ni cumple las propiedades que ésta posee.

El **ovoide** es una curva cerrada y plana compuesta por cuatro arcos de circunferencia unidos por tangencias, de modo que existen dos arcos de circunferencia de igual radio, y otros dos de distinto radio, siendo uno de ellos una semicircunferencia. Tiene un eje de simetría que contiene a los centros de los arcos desiguales. Se denomina diámetro en el ovoide al diámetro de la semicircunferencia perpendicular al eje.

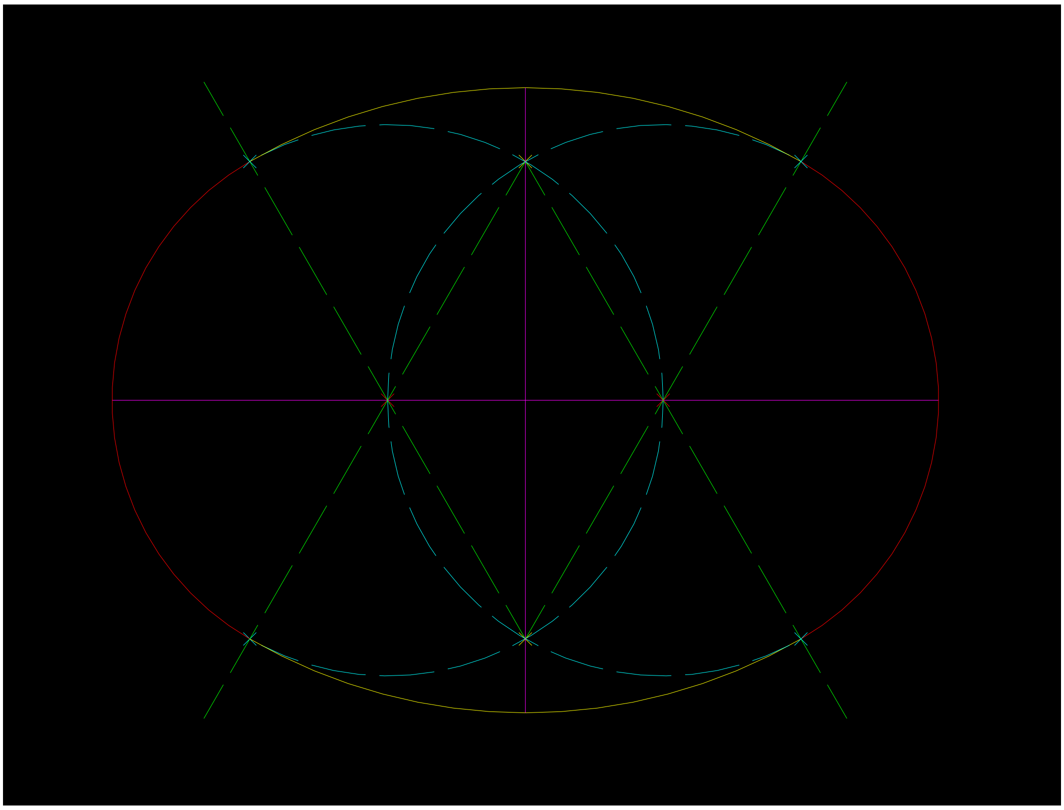

Figura 7.1 – Un óvalo.

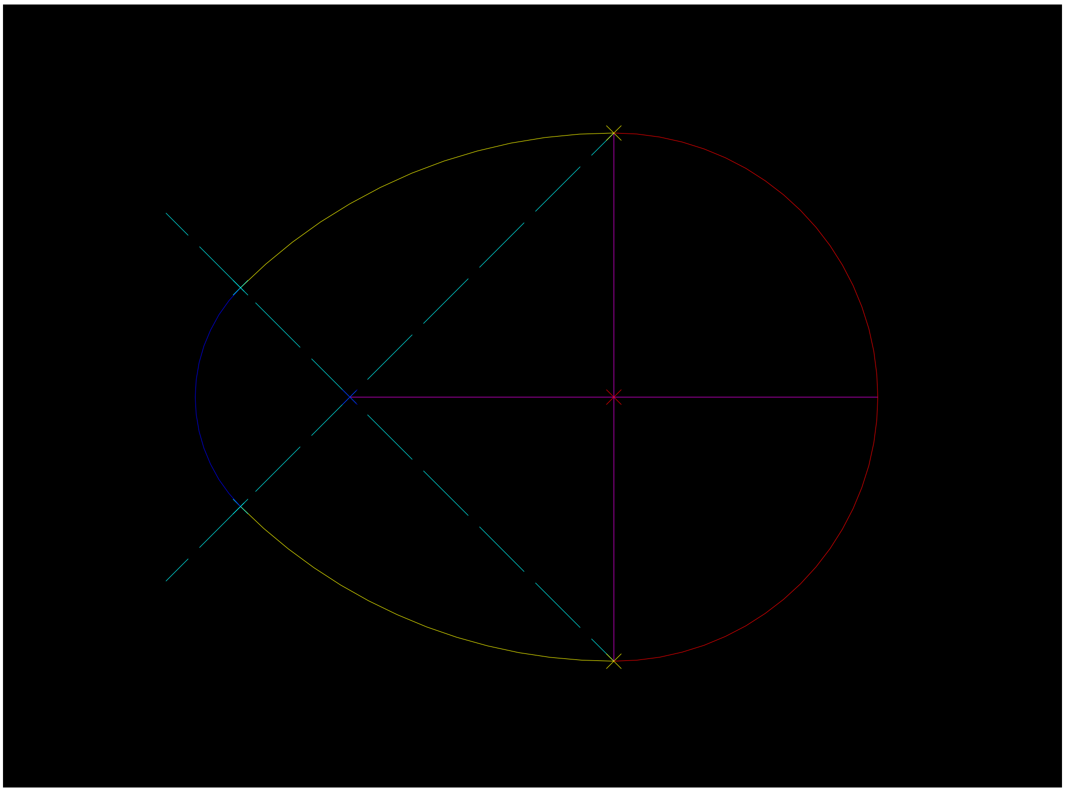

Figura 7.2 – Un ovoide.

La **espiral** es una curva abierta y plana generada por el movimiento de un punto que se aleja de otro denominado centro, a la vez que gira alrededor de él. Puede considerarse como una circunferencia cuyo radio va aumentando progresivamente a medida que se recorre. Se denomina espiral al fragmento de curva que describe el punto en una vuelta completa. Las espiras contiguas distan entre sí una magnitud constante denominada paso.

Normalmente se define en coordenadas polares con una función que depende de dos valores: el ángulo del punto respecto a un eje de referencia, y la distancia desde este punto al centro. Dependiendo de cómo varíe el radio con el ángulo de giro se forman diferentes formas espirales.

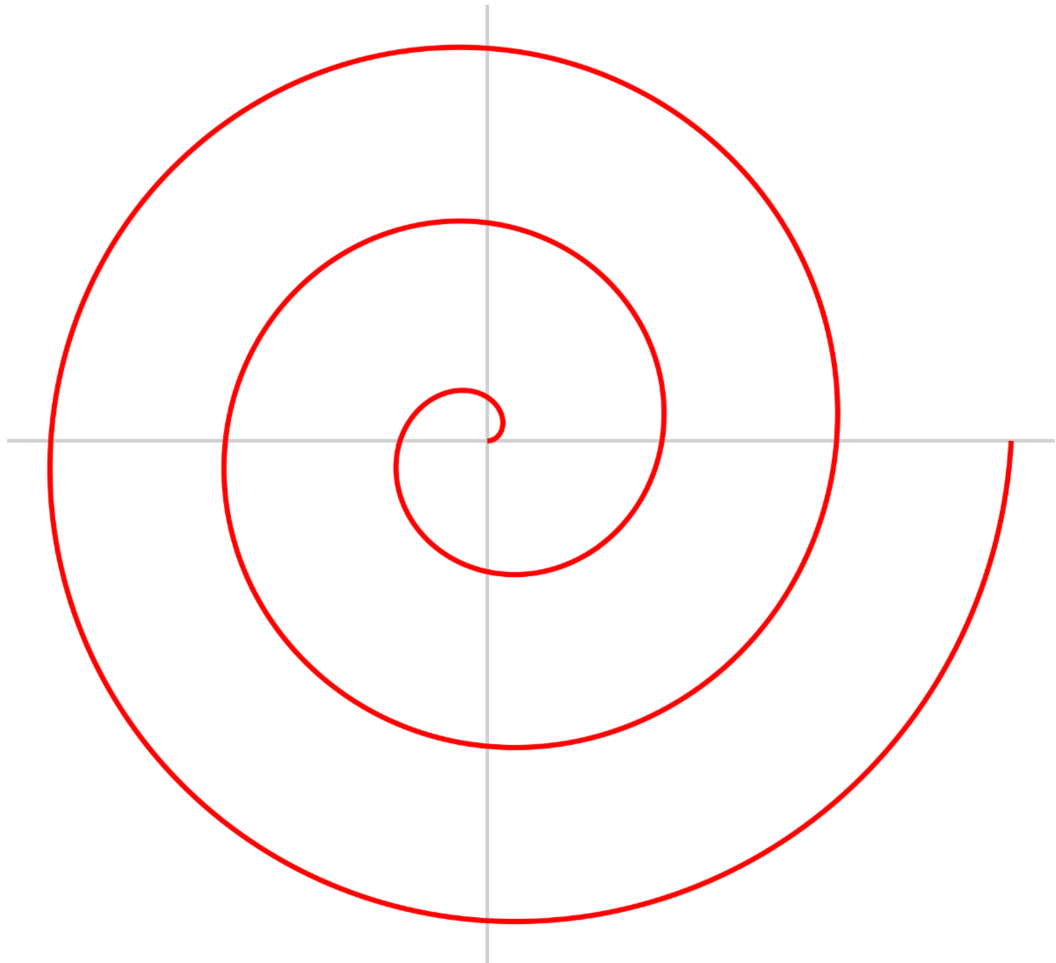

Figura 7.3 – Una espiral.

7.2 – Curvas o Secciones Cónicas

Cuando una **recta g, que corta a otra recta e, gira en el espacio alrededor de ésta, se forma una superficie cónica**. A la recta g le llamamos recta **generatriz** de la superficie cónica, a la recta e, **eje** del cono, y al punto de corte entre ambas, **vértice** v.

Como podemos ver en la figura, se forma un doble cono cuyos vértices son el punto v de intersección entre las dos rectas.

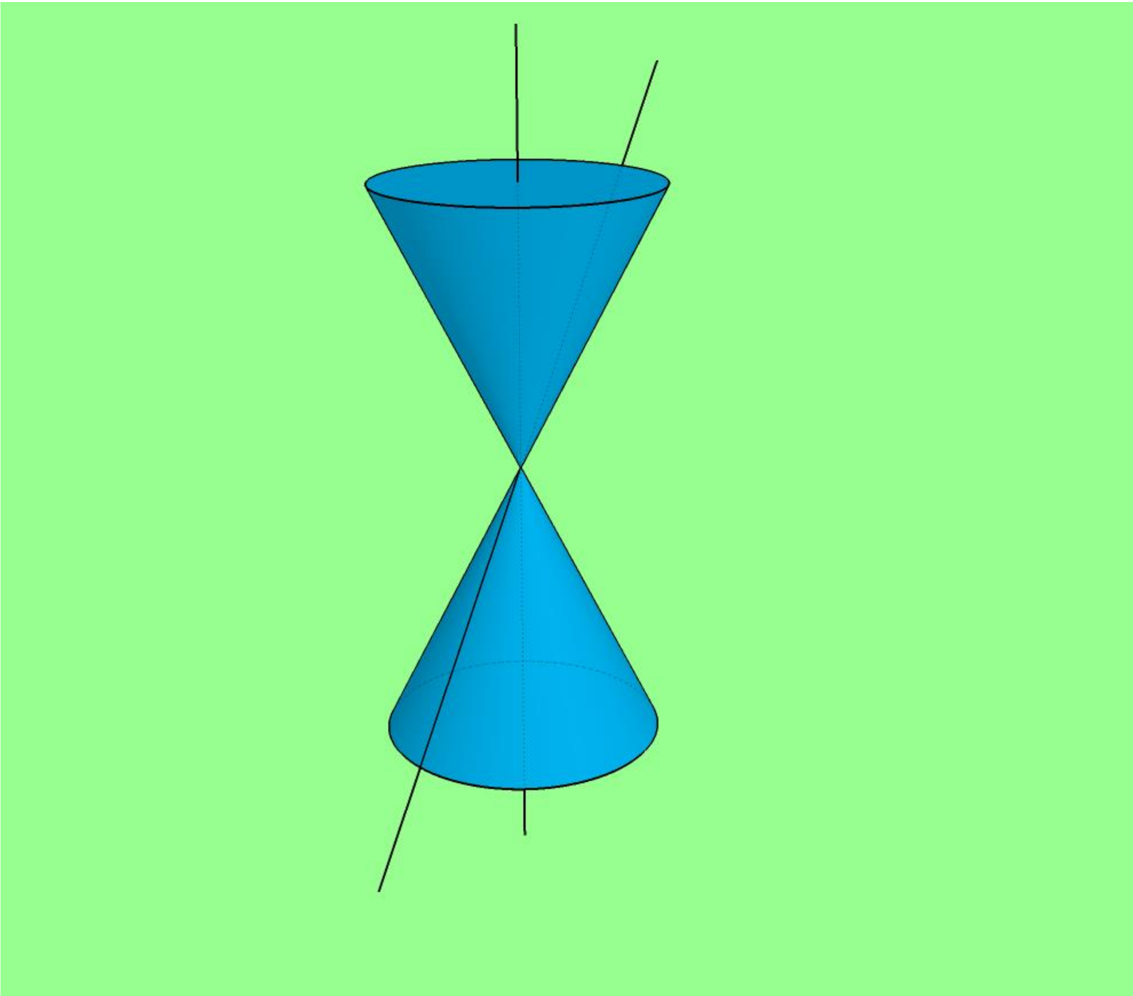

Figura 7.4 – Superficie cónica.

A partir de esta superficie cónica, llamaremos **curva o sección cónica a toda aquella curva que se forme por la intersección de esta superficie cónica con un plano secante a la misma**.

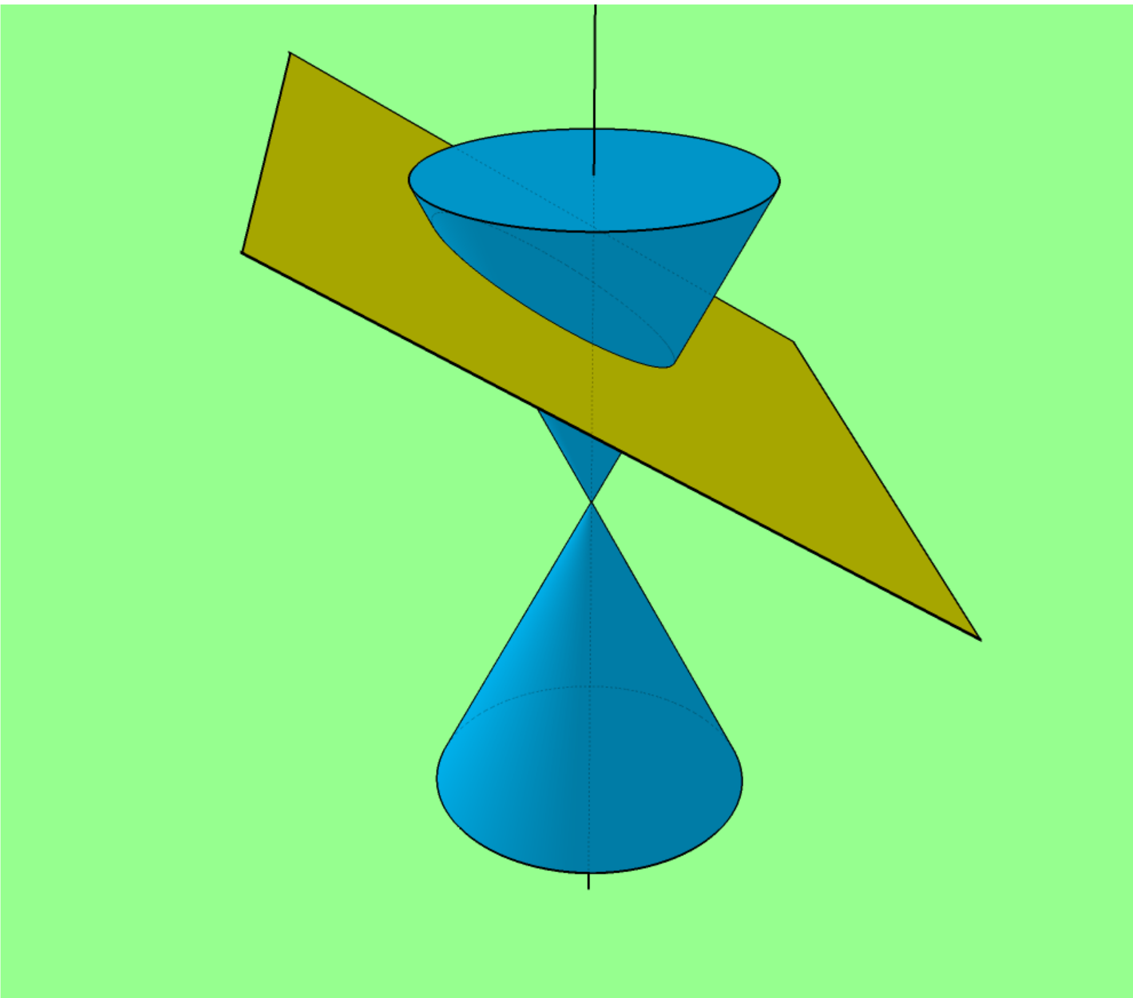

Figura 7.5 – Sección cónica.

Naturalmente, en función de la orientación del plano secante con respecto a la superficie cónica, la curva resultante será diferente. Se pueden dar varios casos:

a) el plano secante es perpendicular al eje e y no pasa por el vértice v. En este caso, se forma una **circunferencia**.

b) el plano secante no es perpendicular ni paralelo al eje e, corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice v. En este caso, se forma una **elipse**.

c) el plano secante es paralelo al eje e, y no pasa por el vértice v. En este caso, se forma una **hipérbola**.

d) el plano secante no es perpendicular ni paralelo al eje e, pero es paralelo a una generatriz, y no pasa por el vértice v. En este caso, se forma una **parábola**.

e) el plano secante pasa por el vértice v y el ángulo que forma el eje con el plano es mayor que el ángulo que forma el eje con una generatriz. En este caso, se forma un **punto**.

f) el plano secante pasa por el vértice v y el ángulo que forma el eje con el plano es menor que el ángulo que forma el eje con una generatriz. En este caso, se forman **un par de rectas secantes**.

g) el plano secante pasa por el vértice v y el ángulo que forma el eje con el plano es igual que el ángulo que forma el eje con una generatriz. En este caso, se forma una única **recta**.

En los tres últimos casos no se forman curvas, sino puntos o rectas, por lo que a esos casos se les llama **cónicas degeneradas**. Las cónicas degeneradas se dan siempre que el plano secante pasa por el vértice v. Como carecen de interés, sólo estudiaremos los cuatro primeros casos, que son las curvas cónicas propias.

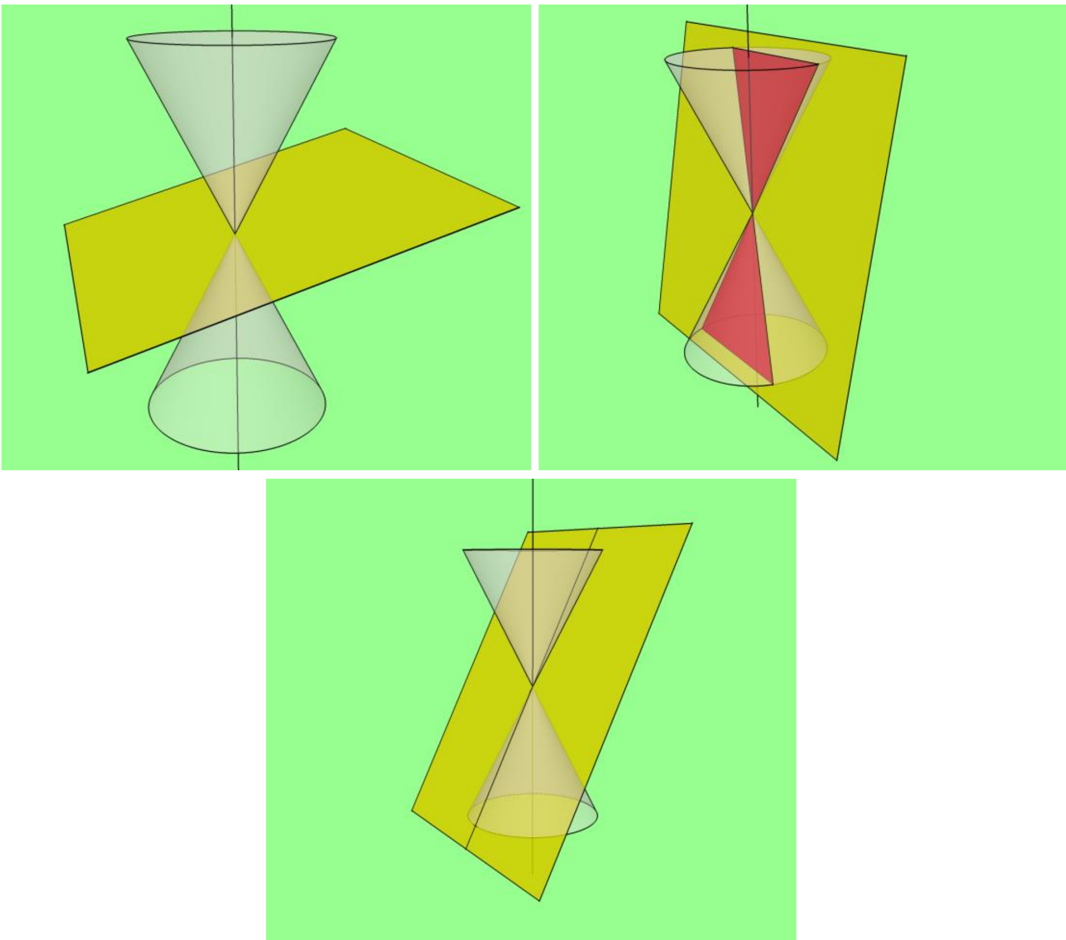

Figura 7.6 –Cónicas degeneradas (punto: arriba izquierda; par de líneas secantes: arriba derecha; línea: abajo derecha).

La expresión algebraica de cualquier curva cónica en coordenadas cartesianas es una ecuación cuadrática con esta forma general:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

En la que x e y son variables cartesianas en el plano, y a, b, c, f, g, h son parámetros que definirán qué tipo de cónica es y qué propiedades tendrá.

Si $h = 0$ y $a = b$ la cónica es una circunferencia.
Si $h^2 < ab$ la cónica es una elipse.
Si $h^2 = ab$ la cónica es una parábola.
Si $h^2 > ab$ la cónica es una hipérbola.

7.2.1 – La Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro llamado **centro**. La distancia a la que equidistan del centro se llama radio. Sin embargo, también se puede definir como la curva cónica que se forma cuando el plano secante es perpendicular al eje e y no pasa por el vértice v.

En este caso, la ecuación general de las cónicas

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

se restringe porque en la circunferencia se cumple:

$$a = b$$
$$h = 0$$

Por lo que cambiando la nomenclatura de esta forma:

$$a = A$$
$$2g = B$$
$$2f = C$$
$$c = D$$

obtenemos la conocida ecuación de la circunferencia:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

Dado que ya hemos estudiado la geometría de la circunferencia, sus ángulos y sus propiedades, pasaremos a estudiar el resto de curvas cónicas sin entrar más en detalle sobre esta ya conocida curva.

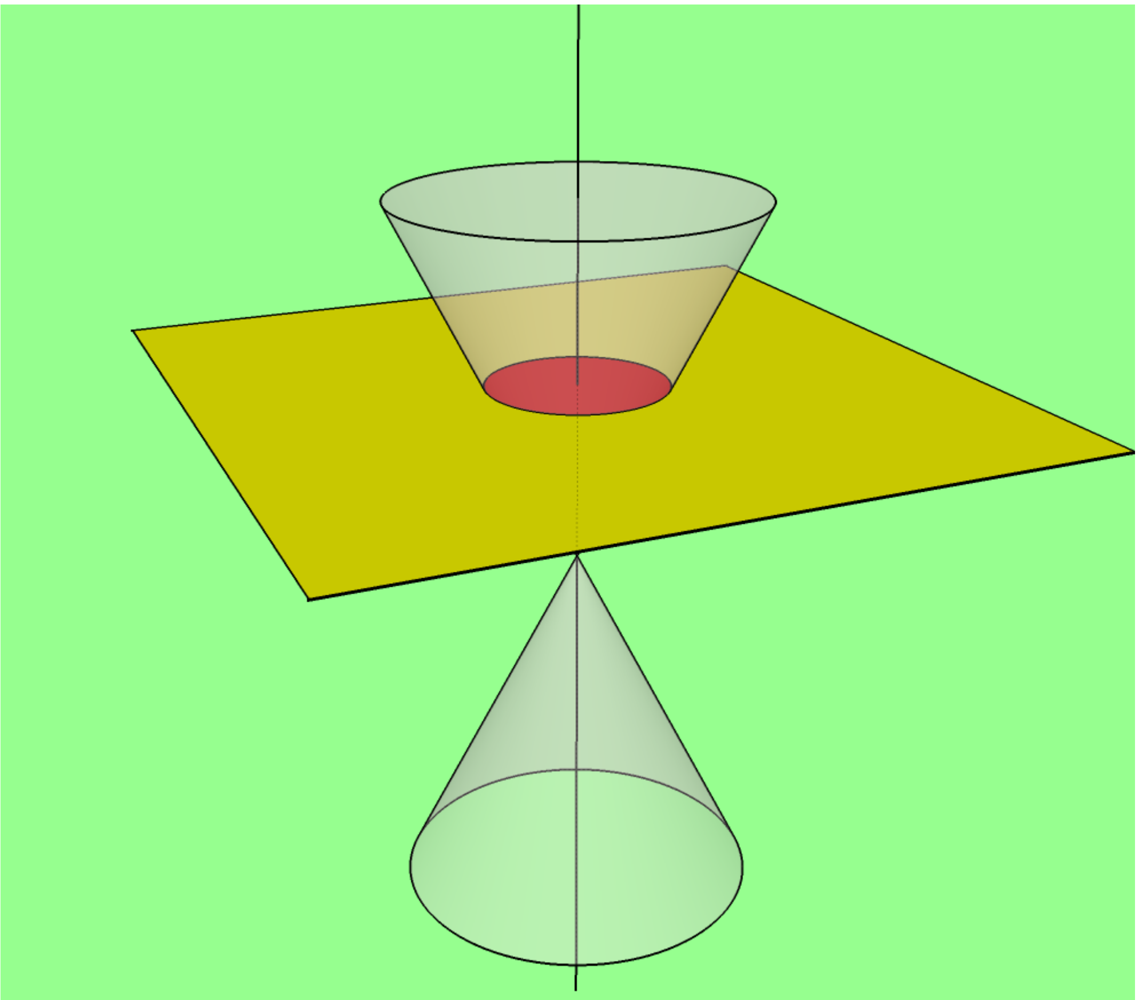

Figura 7.7 – La circunferencia como cónica.

7.2.2 – La Elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos**, F y F', es constante. Pero además, la elipse es la curva cónica que se forma cuando el plano secante no es perpendicular ni paralelo al eje e, corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice v.

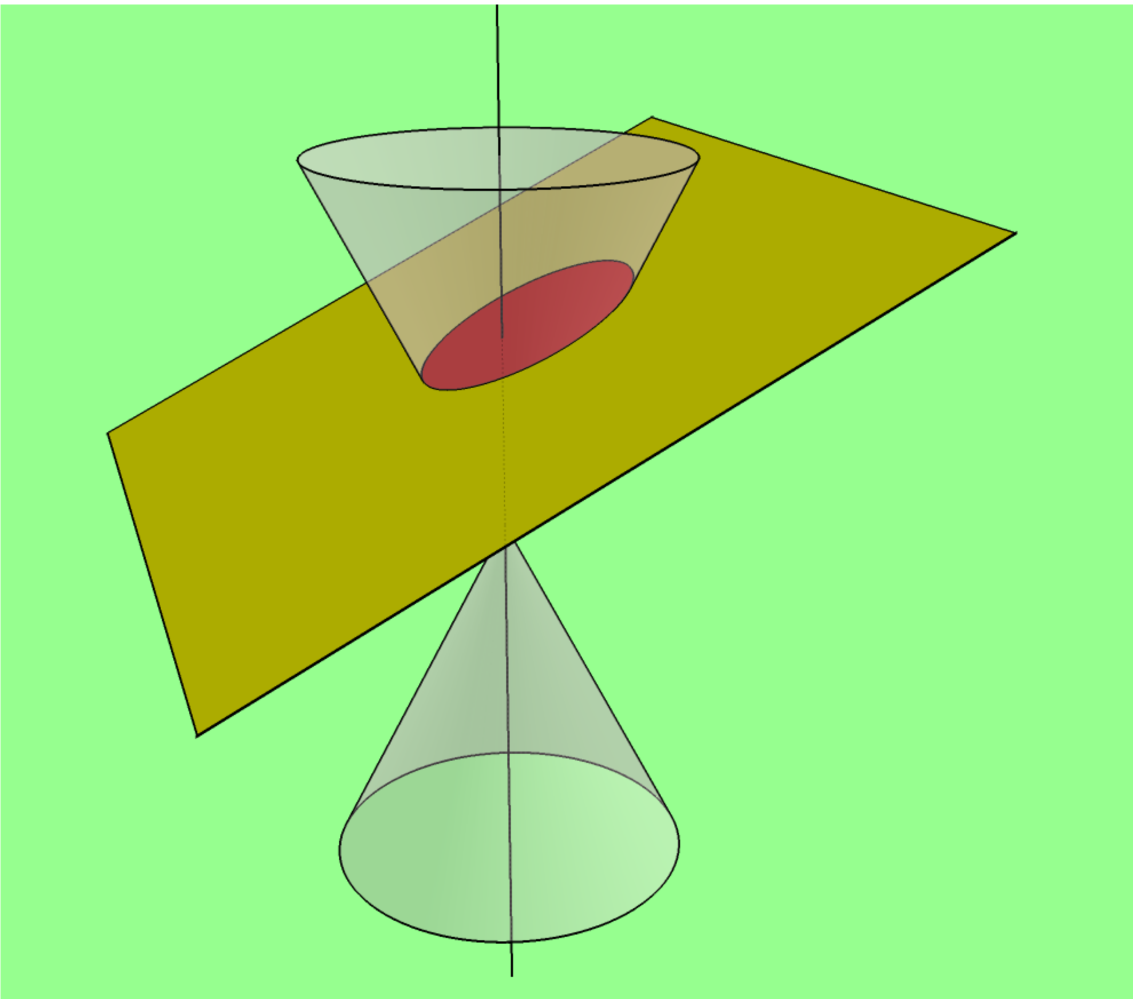

Figura 7.8 – La elipse como cónica.

Por definición, para cada punto P de la elipse, se cumple que

$$PF + PF' = 2a$$

donde a es la medida del semieje mayor de la elipse.

La elipse posee dos ejes: el **eje mayor**, cuya medida es $2a$, que es la mayor distancia entre dos puntos opuestos de la elipse (los **vértices** A y A'), y el **eje menor**, cuya medida es $2b$, que es la menor distancia entre dos puntos opuestos de la elipse (los **vértices** B y B'). Los ejes de la elipse son perpendiculares entre sí. El resultado de la suma de las distancias de cualquier punto a los focos es constante y equivale a la medida del eje mayor.

Al eje sobre el que se sitúan los focos (que se suele definir como el eje mayor) se le llama **eje focal**, denominándose **eje secundario** al otro eje.

Para todo punto P de la elipse, llamaremos **radios vectores** a los vectores $\overrightarrow{FP}$ y $\overrightarrow{F'P}$, es decir, a los vectores que se forman al unir cada uno de los focos F y F' con el punto P.

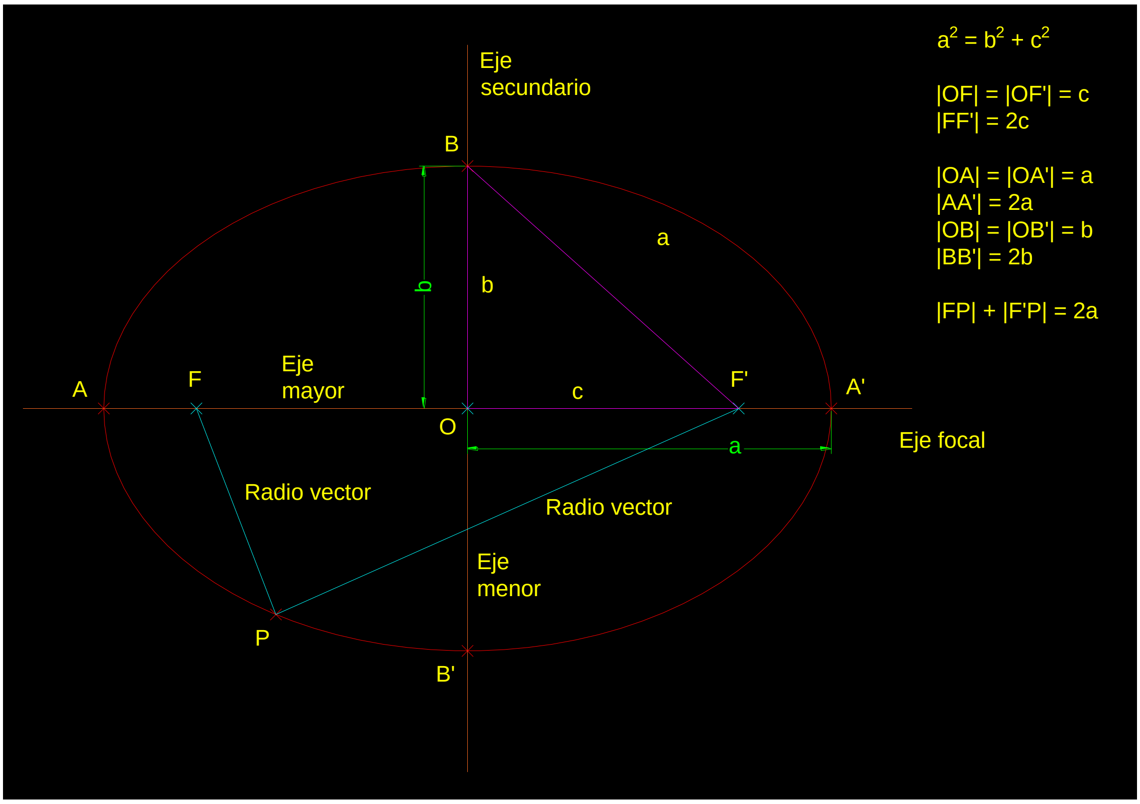

Figura 7.9 – Elementos de una elipse.

La **semidistancia focal** (longitud del segmento que parte del centro de la elipse y acaba en uno de sus focos, o longitud igual a la mitad de la distancia entre focos) se denota habitualmente con la letra c. Su valor es:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

puesto que c y b son los catetos de un triángulo rectángulo del que a es hipotenusa.

La **excentricidad** ε de la elipse es la razón entre su semidistancia focal y su semieje mayor. Su valor está entre 0 y 1, y define cómo de achatada es la elipse.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Cuanto mayor es la excentricidad de una elipse más achatada es y más difiere de la forma de una circunferencia. Si la excentricidad es 0, ambos focos se sitúan en el mismo punto (en el centro de la elipse), los ejes mayor y menor tienen la misma medida, y la elipse se convierte en una circunferencia cuyo centro es la posición de los focos. Si la excentricidad fuera 1, la elipse se convertiría en un segmento.

Se denominan **diámetros conjugados** a cada par de diámetros de la elipse que cumple que uno de ellos pasa por el centro de todas las cuerdas paralelas al otro.

La ecuación de una elipse centrada en un punto $(o_x,\ o_y)$ con semiejes a y b es:

$$\frac{(x - o_x)^2}{a^2} + \frac{(y - o_y)^2}{b^2} = 1$$

La elipse es la forma que sigue la órbita de La Tierra (y también otros planetas) en su movimiento traslacional alrededor de Sol, siendo éste, uno de los focos de la elipse. Dicha órbita elíptica tiene un semieje mayor de 149,60 millones de kilómetros, y una excentricidad de apenas 1/62. Aunque la órbita es dibujada muchas veces con una gran excentricidad para resaltar su carácter elíptico, en realidad la excentricidad es muy baja, por lo que la órbita es prácticamente circular.

Al hacer girar una elipse alrededor de uno de sus ejes, obtenemos una figura llamada **elipsoide de revolución**. Dependiendo del eje sobre el que giremos, obtendremos una figura similar a un balón de Rugby (alrededor del eje mayor), o una forma achatada similar a un canto rodado (alrededor del eje menor). Este achatamiento (o elipticidad) se da en la forma de nuestro planeta Tierra, que es un elipsoide achatado.

7.2.3 – La Hipérbola

La hipérbola se define de forma similar a la elipse, pero empleando la diferencia en lugar de la suma. Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos llamados **focos**, F y F', es constante. Además, es la cónica que se forma cuando el plano secante es paralelo al eje e, y no pasa por el vértice v.

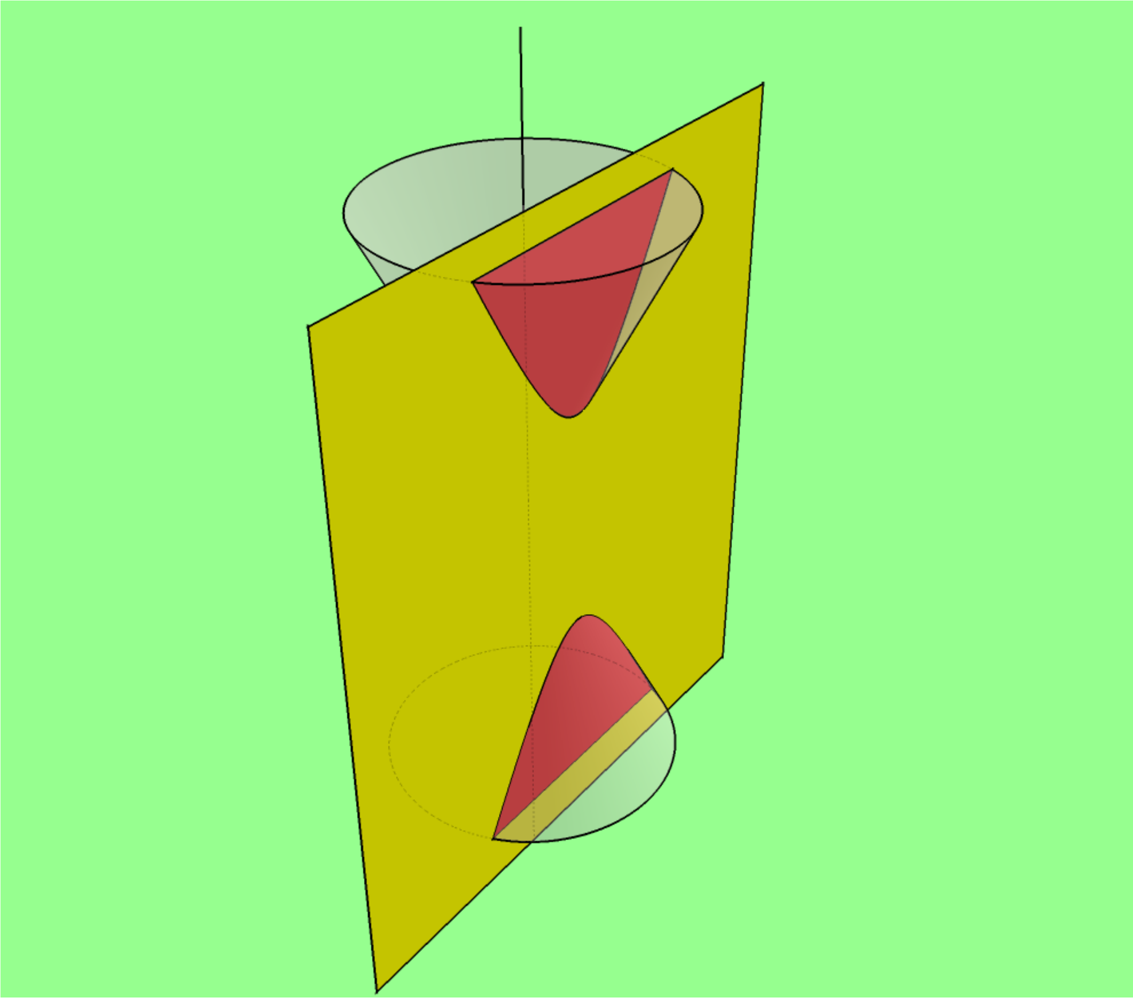

Figura 7.10 – La hipérbola como cónica.

Por definición, para cada punto P de la hipérbola, se cumple que $|PF - PF'| = 2a$.

donde a es la medida del semieje mayor de la hipérbola.

La hipérbola posee dos ejes: el **eje mayor (o real)**, cuya medida es $2a$, que es el segmento en cuya recta se sitúan los focos y los vértices de la misma, y el **eje menor (o imaginario)**, perpendicular al eje mayor pero que no tiene puntos en común con la hipérbola. Los **vértices** de una hipérbola son los dos puntos donde ésta corta a su eje mayor.

Los **radios vectores** de la hipérbola se definen de igual forma a los de la elipse.

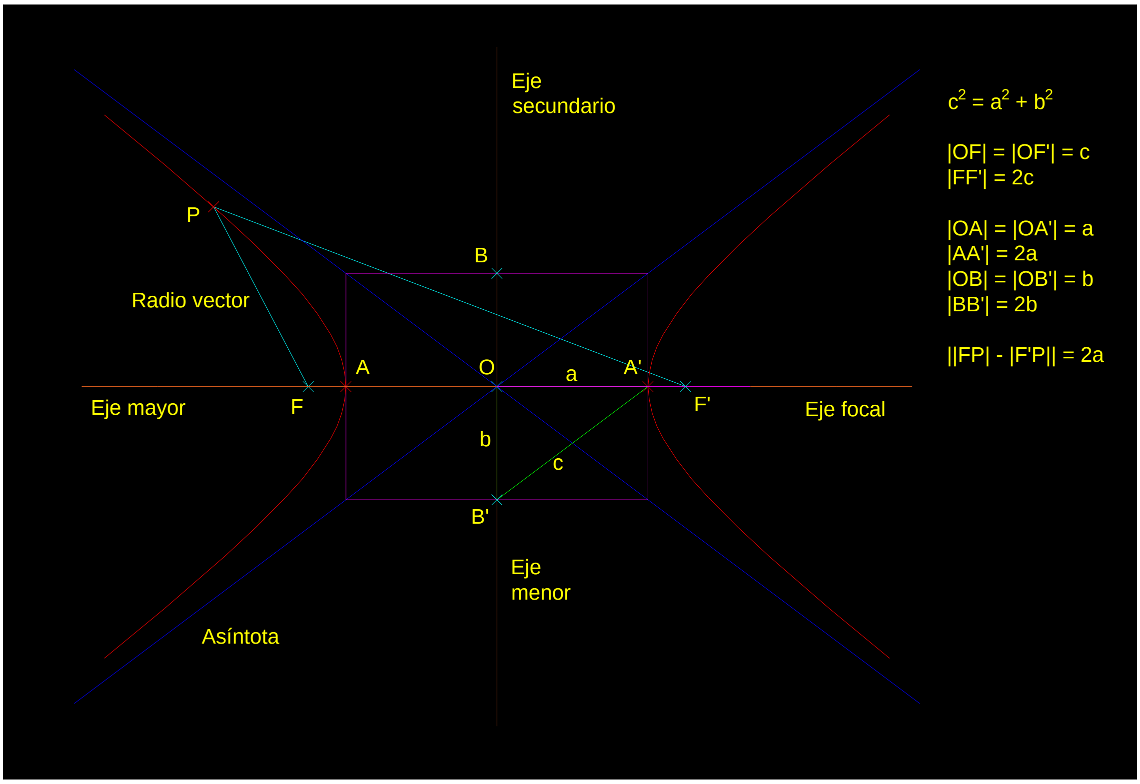

Figura 7.11 – Elementos de una hipérbola.

Los extremos de los ejes definen un rectángulo, de lados $2a$ y $2b$, cuyo centro es el centro de la hipérbola y cuyas diagonales son las asíntotas de la hipérbola.

Las **asíntotas** de la hipérbola son dos rectas que parten del centro de la hipérbola y que se aproximan a la misma indefinidamente sin llegar a cortarla (teóricamente se cortarían en el infinito). Cuanto más se alejan las ramas del centro de la hipérbola más se acercan las asíntotas a la hipérbola.

En la hipérbola, el semieje imaginario define un eje de simetría, de forma que las dos ramas de la hipérbola y las dos asíntotas son siempre simétricas con respecto a este eje.

Al igual que en la elipse, se define la **excentricidad** de la hipérbola como la relación entre c y a, sólo que en este caso c, además de ser la **semidistancia focal**, es la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor:

c se calcula como:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

puesto que a y b son los catetos de un triángulo rectángulo del que c es hipotenusa.

Y la excentricidad ε, que en la hipérbola es siempre mayor que 1, se calcula como:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

Si la excentricidad se aproxima a 1, las ramas de la hipérbola se van cerrando, hasta llegar a 1, momento en el que se convertiría en dos semirrectas. Cuando la excentricidad va aumentando, las ramas de la hipérbola tienden a ser paralelas.

La ecuación de una hipérbola centrada en un punto $(o_x,\ o_y)$ con semiejes a y b es:

$$\frac{(x - o_x)^2}{a^2} - \frac{(y - o_y)^2}{b^2} = 1$$

Lo normal es estudiarlas con centro en el punto $(0, 0)$ con lo que la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con esa definición, los focos F y F' están en las posiciones:

$$F = (c, 0)$$
$$F' = (-c, 0)$$

Y las asíntotas son las rectas:

$$y = x \cdot \frac{b}{a}$$

$$y = -x \cdot \frac{b}{a}$$

Al igual, que con la elipse, si revolucionamos una hipérbola obtenemos una superficie. El **hiperboloide de revolución** es la superficie de revolución generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus dos ejes. Dependiendo del eje elegido, el hiperboloide generado puede ser de una o de dos hojas.

7.2.3.1 – La Hipérbola Equilátera

En el caso en el que las asíntotas formen ángulos de 90º entre ellas, se forma una hipérbola que se llama **hipérbola equilátera**.

Esto se da cuando $a = b$ y provoca que la ecuación de una hipérbola equilátera centrada en el origen de coordenadas se simplifique hasta quedar en:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Y las asíntotas son las dos rectas que forman 45º con los ejes de coordenadas:

$$y = x$$
$$y = -x$$

Se llama hipérbola equilátera porque los semiejes son de igual distancia, por lo que en lugar de definir un rectángulo definen un cuadrado, cuyas diagonales son las asíntotas.

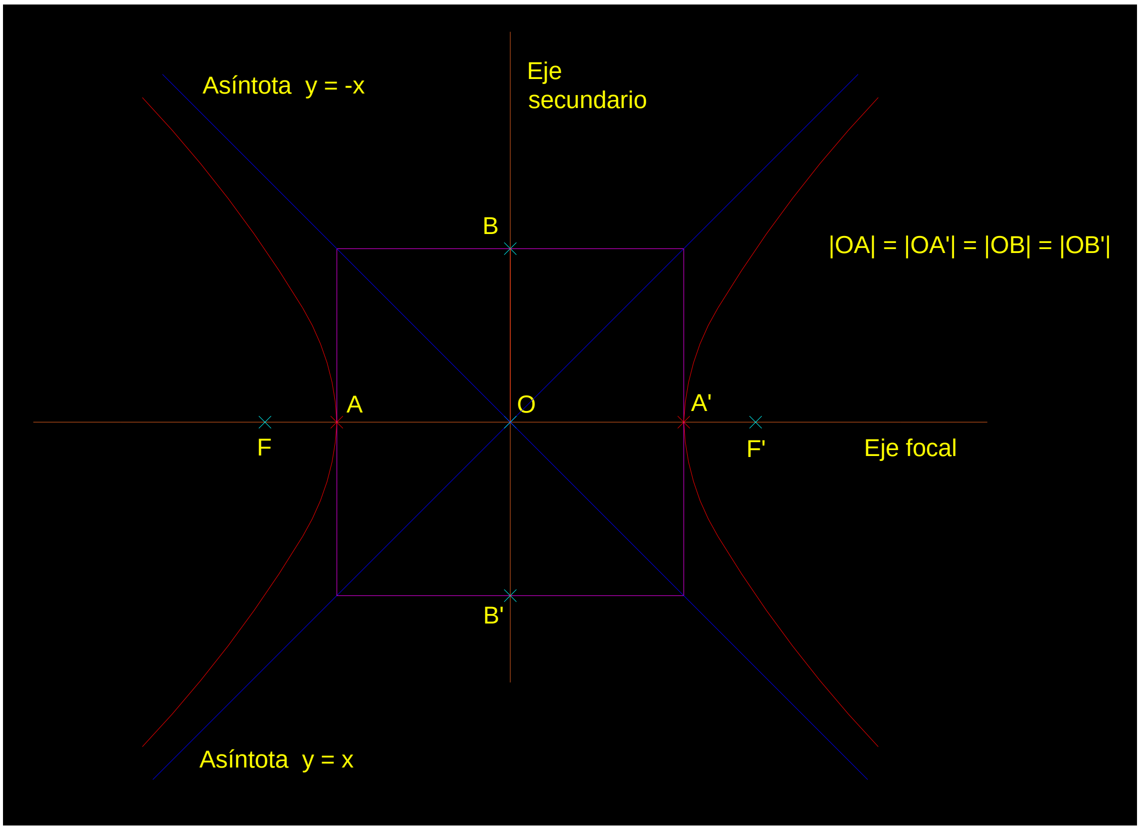

Figura 7.12 – La hipérbola equilátera.

7.2.4 – La Parábola

La parábola es la última de las cónicas no degeneradas. Se forma cuando el plano secante no es ni perpendicular ni paralelo al eje e, pero sí es paralelo a una generatriz, y además no pasa por el vértice v.

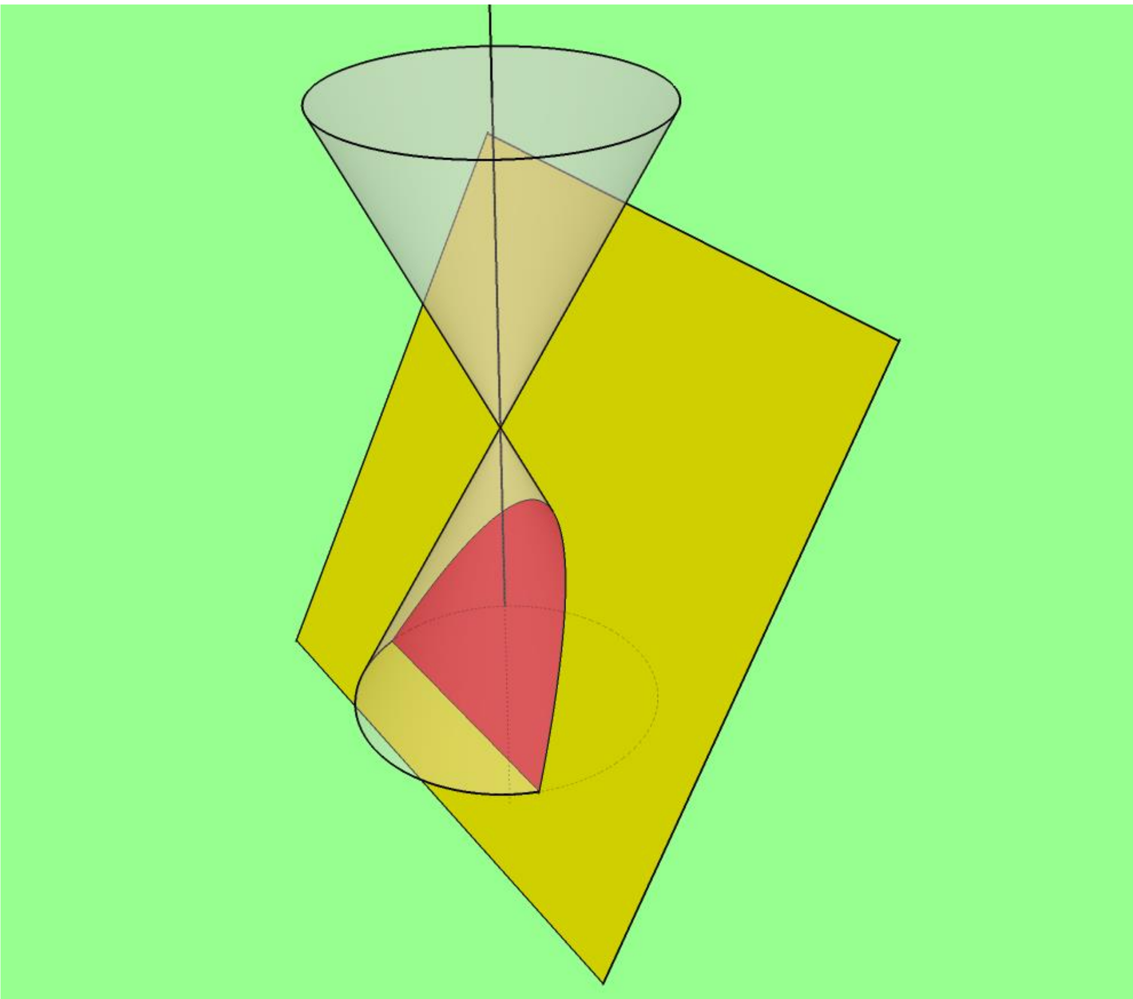

Figura 7.13 – La parábola como cónica.

La parábola es, además, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado **foco,** y de una recta d, llamada **directriz**.

La parábola es simétrica respecto de una recta perpendicular a su recta directriz, a la que llamaremos **eje**. Además, tiene una única rama y un único vértice en el punto en el que la parábola está a la menor distancia posible de la recta directriz (que es el punto en el que corta al eje).

Para todo punto P de la parábola llamaremos **radio vector** al vector $\overrightarrow{FP}$, es decir, al vector que se forma al unir el foco F con el punto P.

La parábola es la única cónica cuya excentricidad siempre es $\varepsilon = 1$. Esto puede parecer contra intuitivo, ya que al estudiar las parábolas empleando ecuaciones, puede parecer que los parámetros de la ecuación cambian la forma de la parábola, haciéndola más ancha o estrecha. Lo cierto es que todas las parábolas tienen la misma forma, pero la escala (o zoom al que visualicemos la curva) crea la ilusión de que hay parábolas de formas diferentes. La unicidad de la excentricidad viene a indicar que todas las parábolas son semejantes, pues tienen la misma forma, y el tamaño depende de la escala a la que la visualicemos.

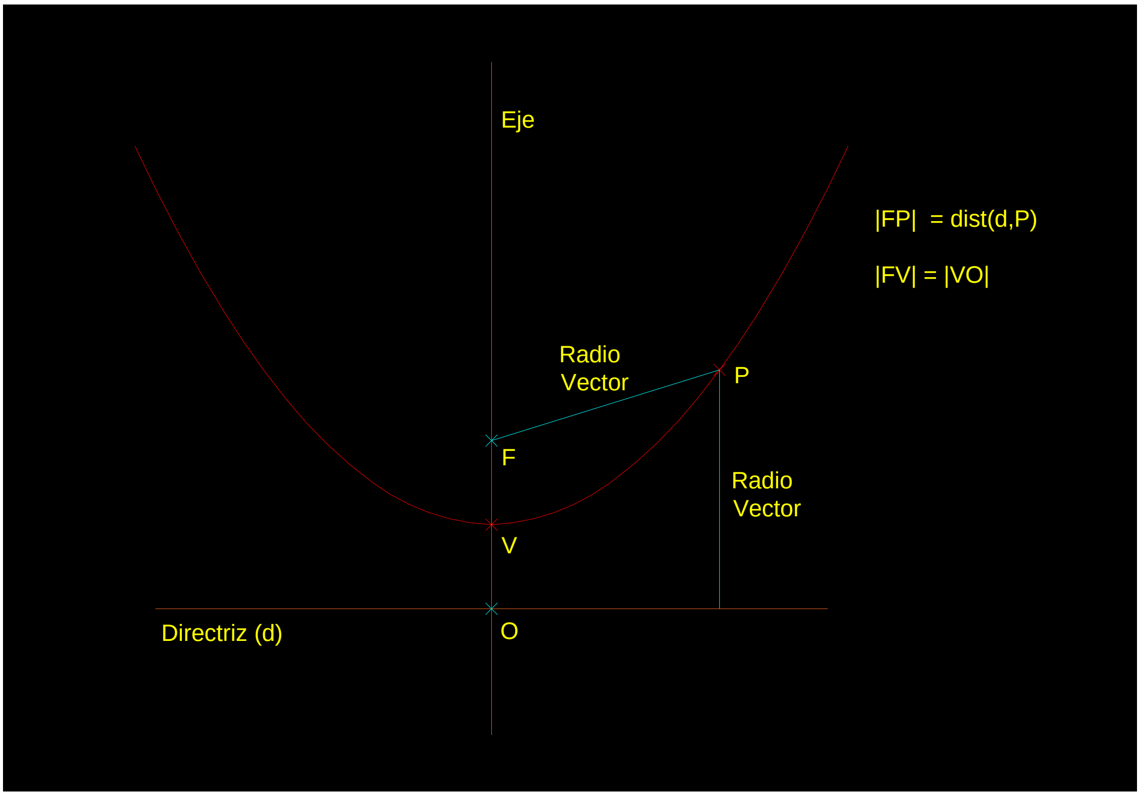

Figura 7.14 – Elementos de una parábola.

La ecuación general de una cónica es válida para una parábola siempre que $h^2 = ab$, que es la condición que se tiene que cumplir para obtener una cónica en forma de parábola.

Sin embargo, si la parábola tiene su vértice en (v_x, v_y) y el eje es vertical, la ecuación se simplifica a:

$$y - v_y = a(x - v_x)^2$$

Y si el vértice es el origen de coordenadas, la ecuación es tan simple como:

$$y = ax^2$$

donde a especifica la escala o tamaño de la parábola, que no la forma. Si a es negativo la parábola tendría dirección hacia abajo, y si es positivo, hacia arriba.

En lugar de en función del parámetro a, a veces se especifica la ecuación en función de la **distancia focal** p, que es la distancia entre el foco y el vértice. Si suponemos una parábola cuyo vértice es el origen de coordenadas, y cuya distancia focal es p (el foco está en el punto $(0, p)$), su ecuación será:

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

$4p$ es precisamente la longitud del lado recto de la parábola. El **lado recto** de una parábola es el segmento de recta comprendido entre dos puntos de la parábola, de modo que pasa por el foco y es paralelo a la recta directriz de la misma. Por tanto, el lado recto mide siempre cuatro veces la distancia focal.

Una propiedad muy importante de la parábola es que la tangente a una parábola en un punto P, y la normal a la misma en ese punto, son las bisectrices de los ángulos que forman el radio vector en ese punto P y una recta paralela al eje que pase por P. Esto quiere decir que todos los rayos paralelos al eje de la parábola serán reflejados sobre el foco.

Esto permite la construcción de antenas parabólicas y radiotelescopios que son óptimos para la recepción de señales lejanas, ya que, como consecuencia de que la parábola refleja los rayos paralelos al eje de la parábola en dirección al foco, se coloca un receptor en la posición del foco sobre el que se concentrarán las señales recibidas desde un emisor lejano (que llegarán aproximadamente paralelas). Las antenas parabólicas son **paraboloides de revolución**, que es la superficie formada al revolucionar una parábola alrededor de su eje.

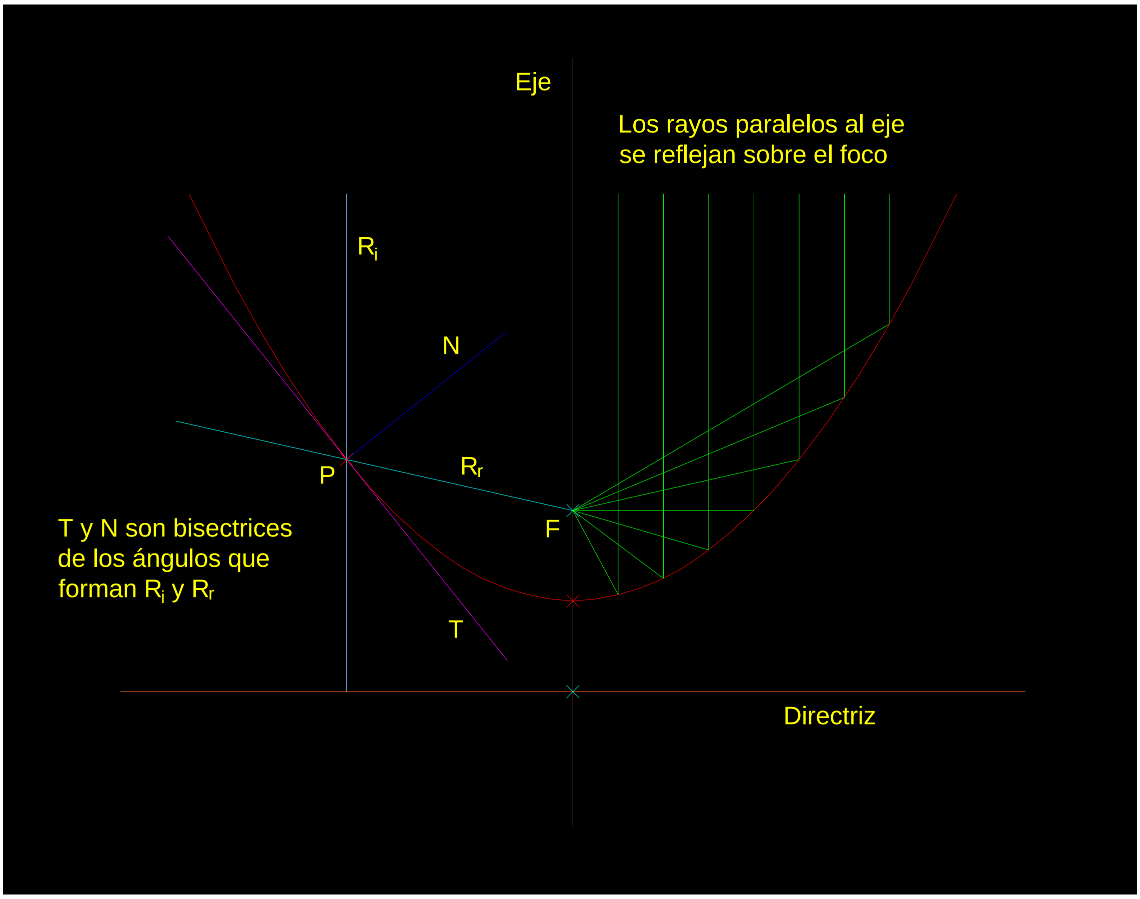

Figura 7.15 – Fundamento matemático de una antena parabólica.

7.2.5 – Construcción de Curvas Cónicas

Las curvas o secciones cónicas se pueden formar de varias maneras: mediante radios vectores (llamado método “por puntos”), o por haces proyectivos.

La construcción por puntos (o mediante radios vectores) consiste en emplear la propia definición de la cónica. Por ejemplo, para una parábola, se trata de trazar dos arcos de circunferencia desde los focos, cuyos radios sean tales que su diferencia sea igual a $2a$ (la distancia focal). La intersección de dichos arcos es un punto de la hipérbola. Repitiendo este proceso para diferentes distancias, obtendremos una serie de puntos de la hipérbola, que unidos formarán una aproximación a la misma. Cuantos más puntos obtengamos, mejor será la aproximación. Se trata de una aproximación porque, aunque los puntos obtenidos son exactos, los uniremos entre sí por arcos que pasen por dichos puntos, que no seguirán exactamente la forma de la hipérbola, aunque con un número de puntos suficiente, la diferencia es inapreciable.

La construcción por puntos de la elipse es muy similar a la de hipérbola, pero buscando la intersección de arcos cuyos radios sumen $2a$.

Lo mismo se puede aplicar para la parábola, pero en lugar de trazar dos arcos, se trazaría una paralela a la recta directriz a una distancia arbitraria, y un arco de radio igual a la distancia anterior. La intersección de ambas líneas es un punto de la parábola. Aplicando esto mismo para diferentes distancias, obtendremos una serie de puntos de la parábola, que unidos formarán una aproximación a la misma.

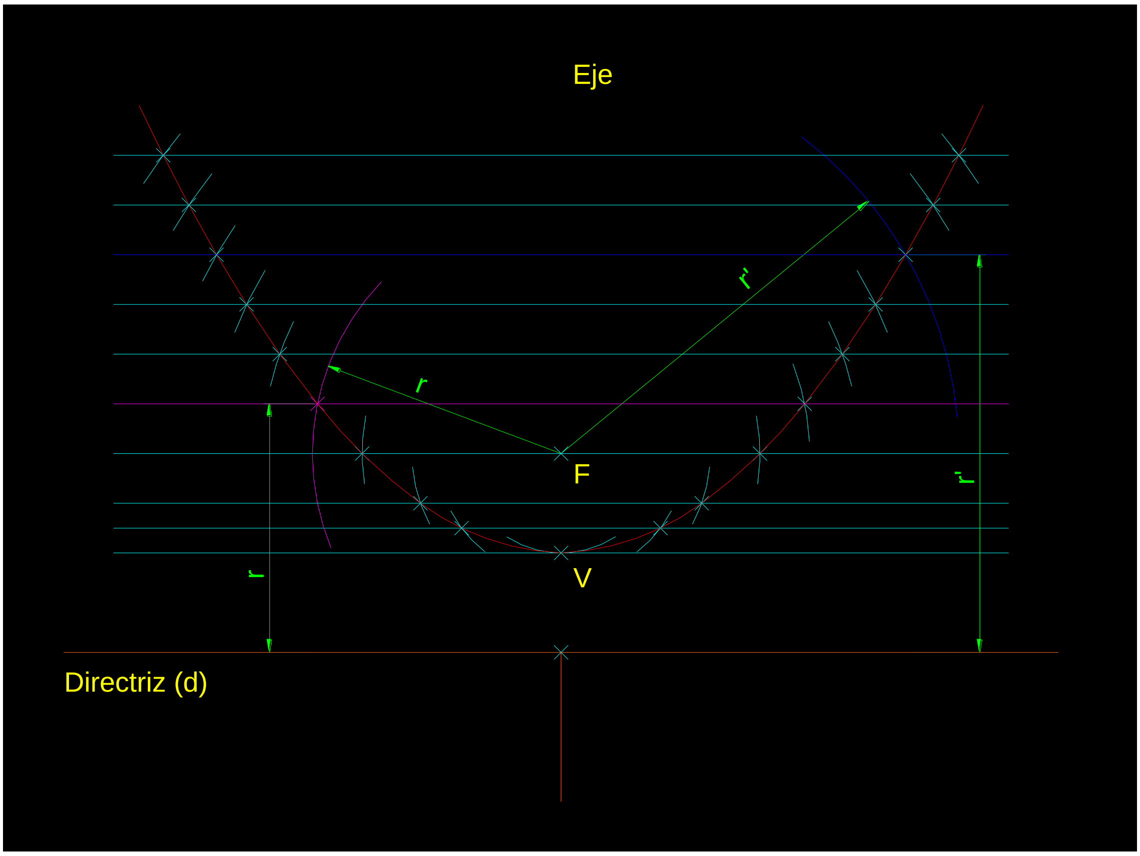

Figura 7.16 – Construcción de una parábola por puntos (radios vectores).

Además, la elipse está disponible como comando en muchos programas CAD, como AutoCAD. En el caso de la elipse, también se puede construir por afinidad con otras formas como la circunferencia o un paralelogramo.

La construcción de cónicas por haces proyectivos es algo más compleja. En el caso de la hipérbola, primero se ha de buscar un punto P que pertenezca a la elipse (por el método de radios vectores, por ejemplo). Entonces se dibuja un rectángulo de diagonal AP, y se dividen los lados que parten de P en n parte iguales (ambos lados se dividen el mismo número de veces). Numeramos los puntos obtenidos (en ambos lados) de 1 a n, y trazamos líneas que unan esos puntos con los vértices A y A' de la hipérbola (se une el vértice más lejano con los puntos marcados sobre el lado del rectángulo que es paralelo al eje secundario, y el vértice más cercano con el lado del rectángulo paralelo al eje focal). Los puntos de intersección de los segmentos $A1$ y $A'1'$, $A2$ y $A'2'$, $A3$ y $A'3'$, etc. son puntos de la hipérbola.

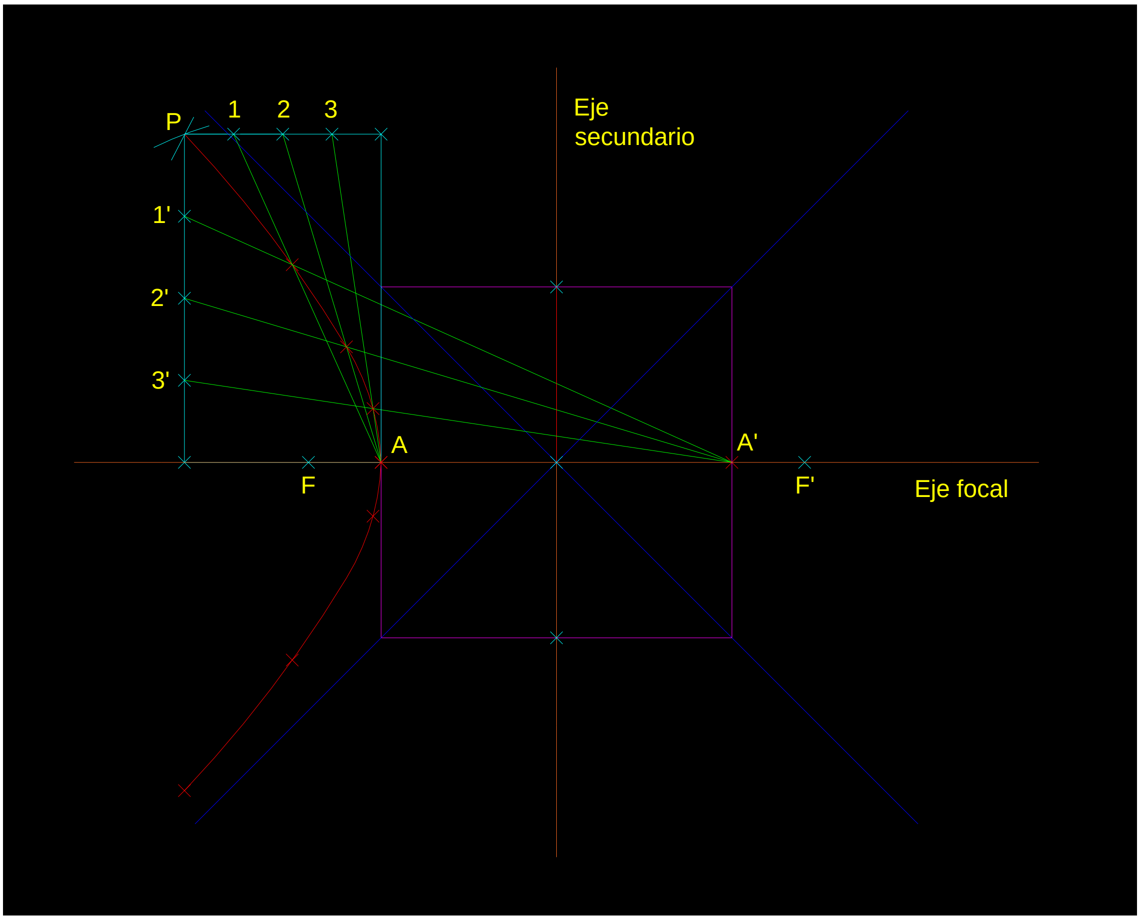

Figura 7.17 – Construcción de una hipérbola por haces proyectivos.

La parábola y la elipse se construyen de forma similar, trazando un rectángulo y marcando una serie de puntos sobre sus lados que definirán los haces proyectivos. El tamaño del rectángulo dependerá de los parámetros de la cónica.

Sin embargo, en el caso de una ingeniería como la nuestra, quizás lo más sencillo para construir una cónica con bastante precisión sería introducir la ecuación de la cónica y construirla por aproximación mediante un sencillo programa que dé valores a la ecuación a pasos discretos. Esto generaría una línea poligonal que de hacerse de grano muy fino sería visualmente indistinguible de una curva. Es así como se construyen este tipo de curvas en programas que no disponen de la ecuación analítica de la curva.

Algoritmo **DibujaElipse**

Entradas:

a, b : R // *medidas de los semiejes mayor y menor de la elipse*

n : N // *número de pasos o puntos evaluados en la ecuación de la elipse*

Auxiliar:

i : N

x_ini, x_fin, x_rango : R

Salidas:

x : vector [0..n-1] de R // *valores de la curva para el eje X*

y_pos : vector [0..n-1] de R // *valores de la curva para el eje Y positivo*

y_neg : vector [0..n-1] de R // *valores de la curva para el eje Y negativo*

Algoritmo:

```
i = 0;
x_ini = -a;
x_fin = a;
x_rango = x_fin – x_ini;

mientras (i < n) hacer
{
   // La ecuación de la elipse es:
   // (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1;

   // Despejando para el eje y:
   // y = ±b*(1 - (x/a)^2)^0.5;

   x[i] = x_ini + x_rango*(i/n);
   y_pos[i] = +b*(1 - (x[i]/a)^2)^0.5;
   y_neg[i] = -b*(1 - (x[i]/a)^2)^0.5;
```

```
    i = i +1;
}

DibujaLineaPoligonal(x, y_pos, n);
DibujaLineaPoligonal(x, y_neg, n);
```

Fin de DibujaElipse

Algoritmo 7.1 – Algoritmo para dibujar a pasos discretos una elipse centrada en el origen.