Tema 6

Tangencias, Enlaces y Polaridad

En este tema revisaremos la unión de curvas y líneas mediante tangencias, además de introducir el concepto de polaridad. Las tangencias es un campo extensísimo, del que apenas veremos los conceptos más relevantes.

6.1 – Tangencias

Se dice que dos figuras planas son **tangentes** cuando tienen **un solo punto en común**, al que se llama **punto de tangencia**.

Las tangencias pueden producirse entre circunferencias y rectas, entre polígonos y rectas, entre dos circunferencias, entre circunferencias y polígonos, etc. Sin embargo, las tangencias más habituales son aquellas que se producen entre rectas y circunferencias, y entre circunferencias entre sí.

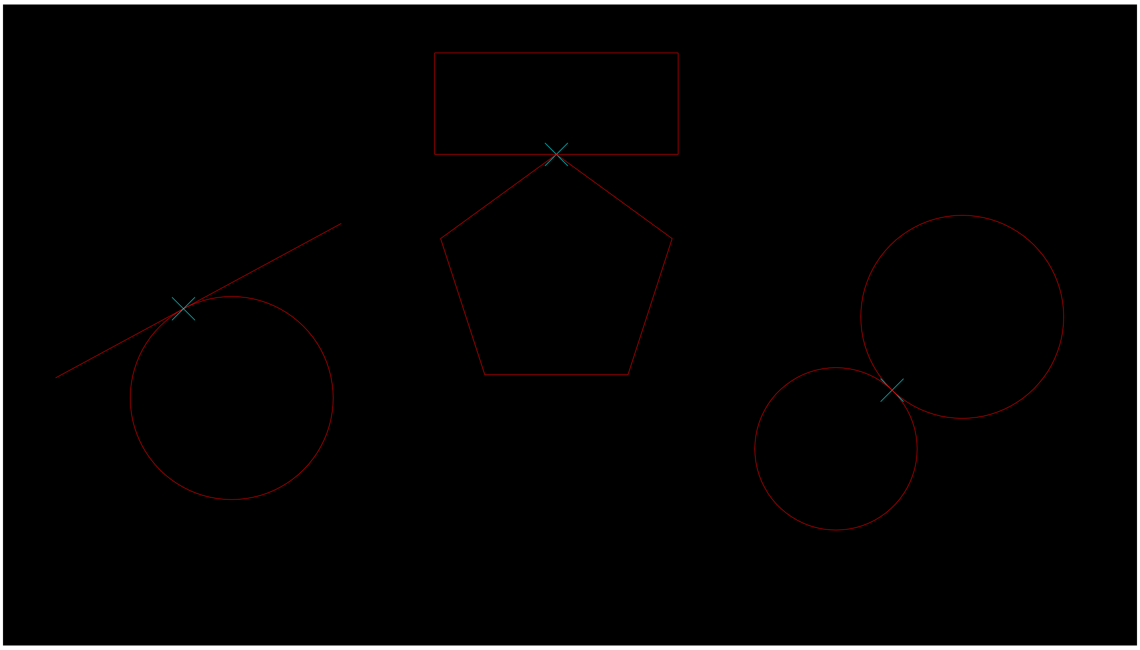

Figura 6.1 – Tangencias entre diferentes figuras.

En el caso de las curvas, cuando se traza una **recta tangente** a la misma, dicha recta define la dirección de la **derivada** de la curva en el punto de tangencia. La derivada indica la pendiente de la curva en cada punto. Este es un concepto crucial en muchas disciplinas científicas.

Si trazamos una ortogonal a la recta tangente que pase por el punto de tangencia, a dicha recta se le llama **recta normal**. La recta normal sirve, por ejemplo, para determinar cuál sería la dirección en la que rebotaría un haz de luz que incida sobre ese punto (la dirección en la que se refleje o refracte dependerá del tipo de material y de la dirección normal en ese punto). Conocer este tipo de propiedades es de vital importancia en sistemas de comunicaciones como la fibra óptica, que se basa en la reflexión y refracción de la luz dentro de un medio de transporte.

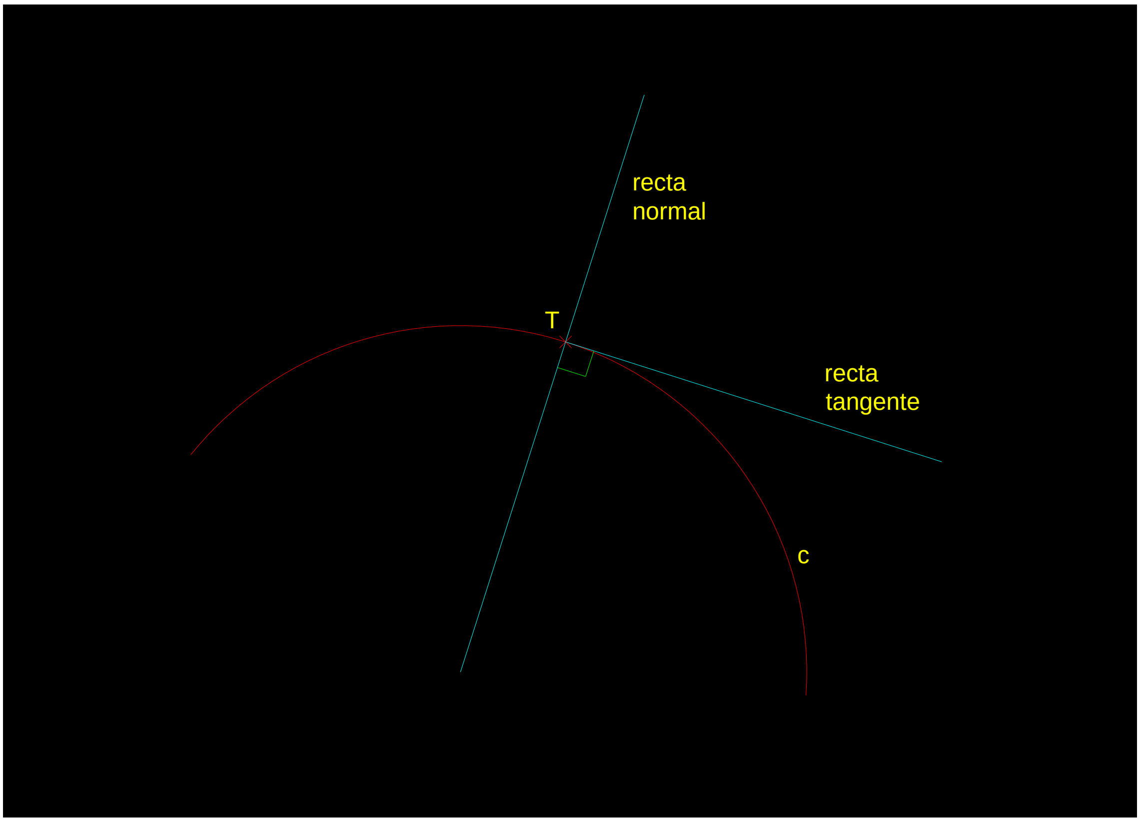

Figura 6.2 – Recta tangente y recta normal a una curva, en un punto.

El concepto de tangencia se puede extrapolar a superficies, de modo que se puede encontrar un plano tangente a una superficie curva que solo tenga en común un punto con dicha superficie.

6.1.1 – Teoremas de Tangencia

Para hallar los puntos de tangencia entre las diferentes líneas curvas y rectas, han de tenerse en cuenta los teoremas que enunciamos a continuación.

Primer teorema de tangencias: una recta r es tangente a una circunferencia c cuando tienen entre sí solamente un punto en común T, y la recta es perpendicular al radio de la circunferencia c en el punto T.

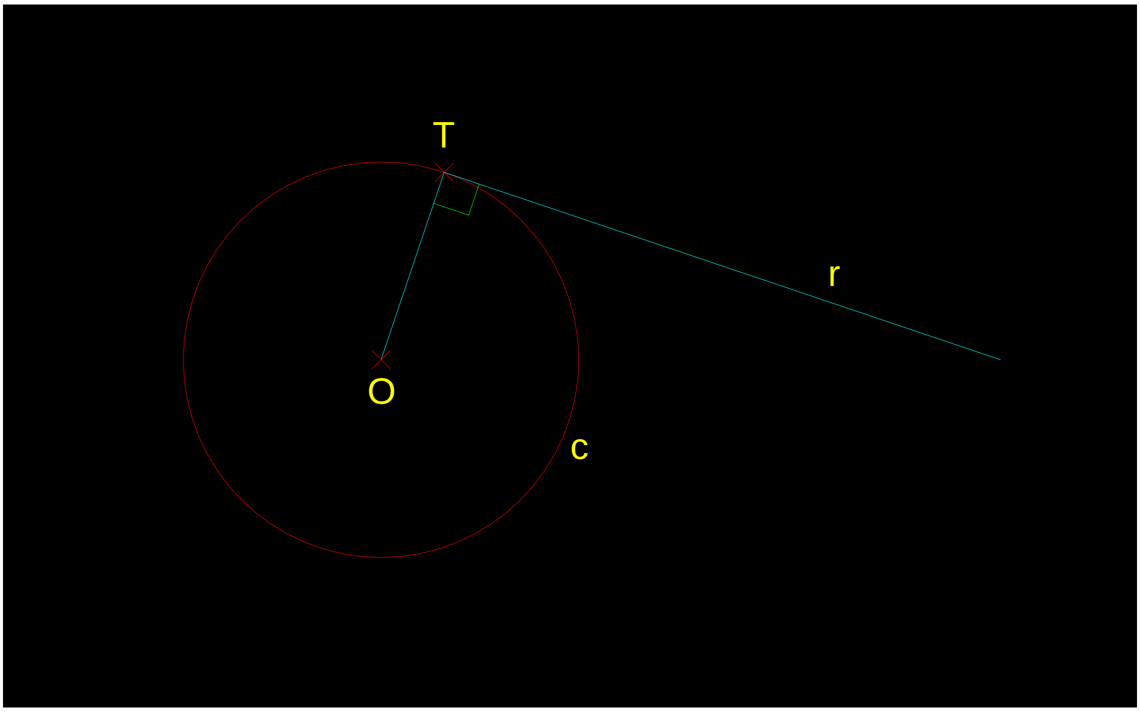

Figura 6.3 – Primer teorema de tangencias.

Segundo teorema de tangencias: una circunferencia c es tangente a dos rectas r y s que se cortan, si el centro O de la circunferencia está situado sobre la bisectriz del ángulo que forman las rectas.

Tercer teorema de tangencias: dos circunferencias son tangentes si tienen un punto en común T alineado con los centros de las circunferencias.

Cuarto teorema de tangencias: en dos circunferencias tangentes, si se traza un par de diámetros paralelos y se unen los extremos opuestos de ambos mediante sendos segmentos, se observa que dichos segmentos están alineados con el punto de tangencia T y además se cruzan en el punto T.

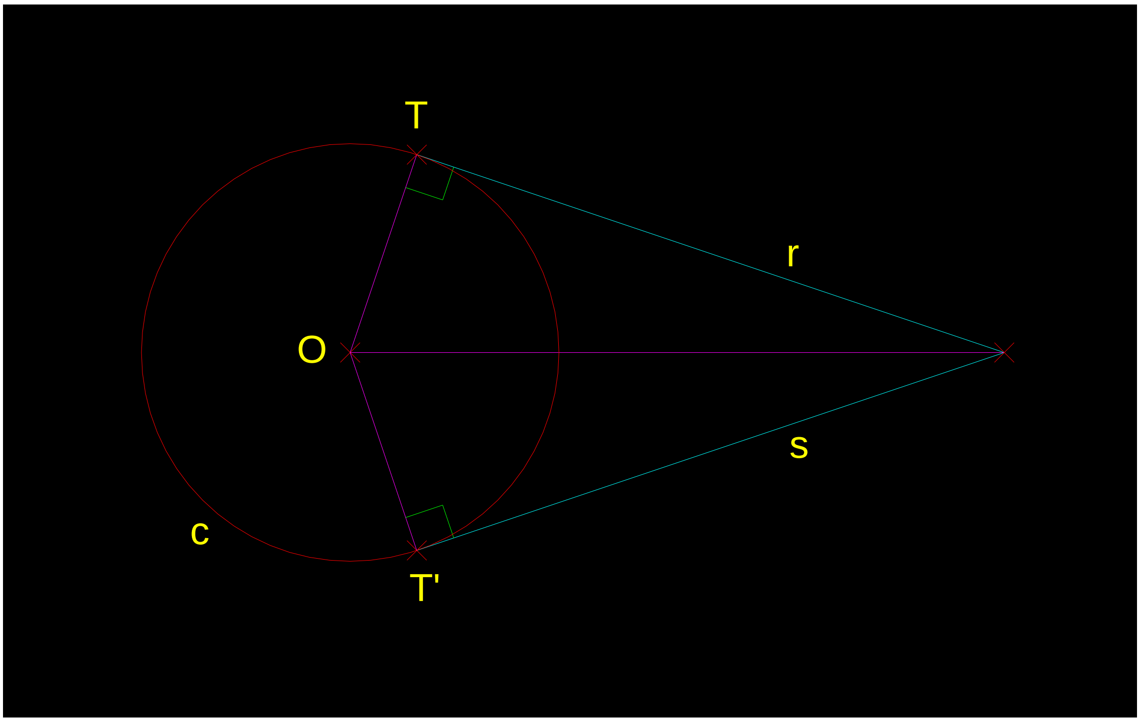

Figura 6.4 – Segundo teorema de tangencias.

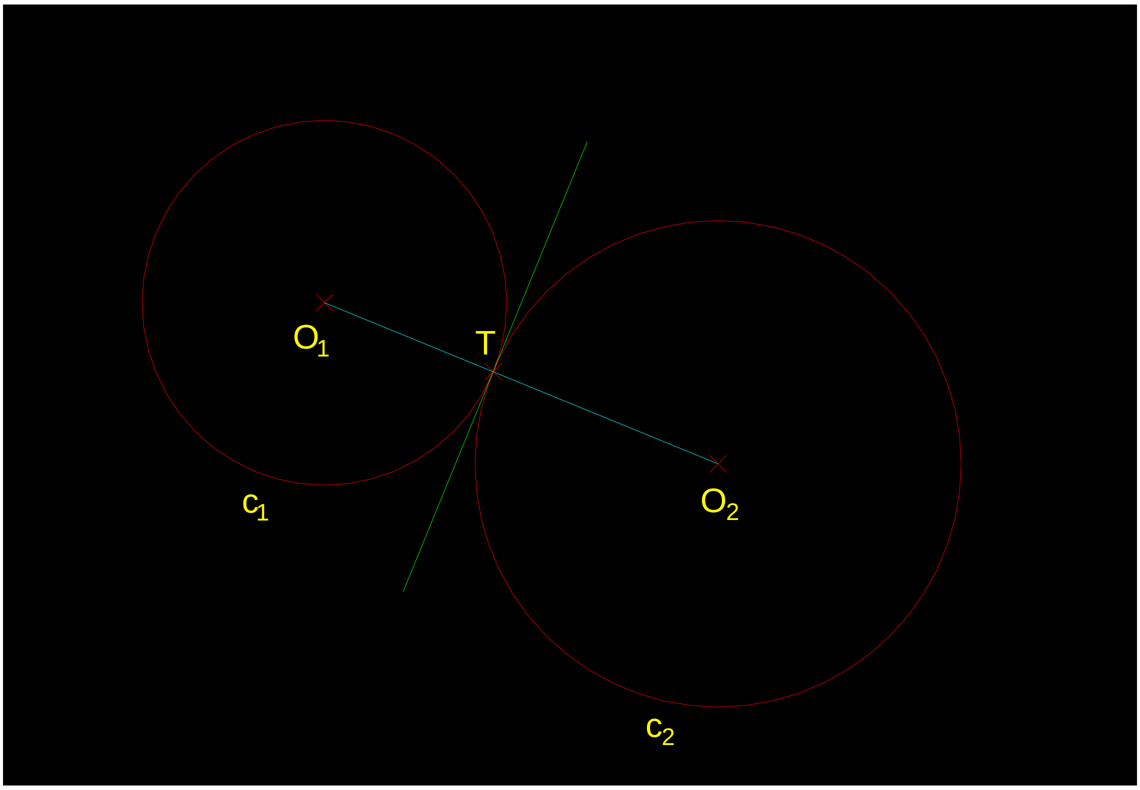

Figura 6.5 – Tercer teorema de tangencias.

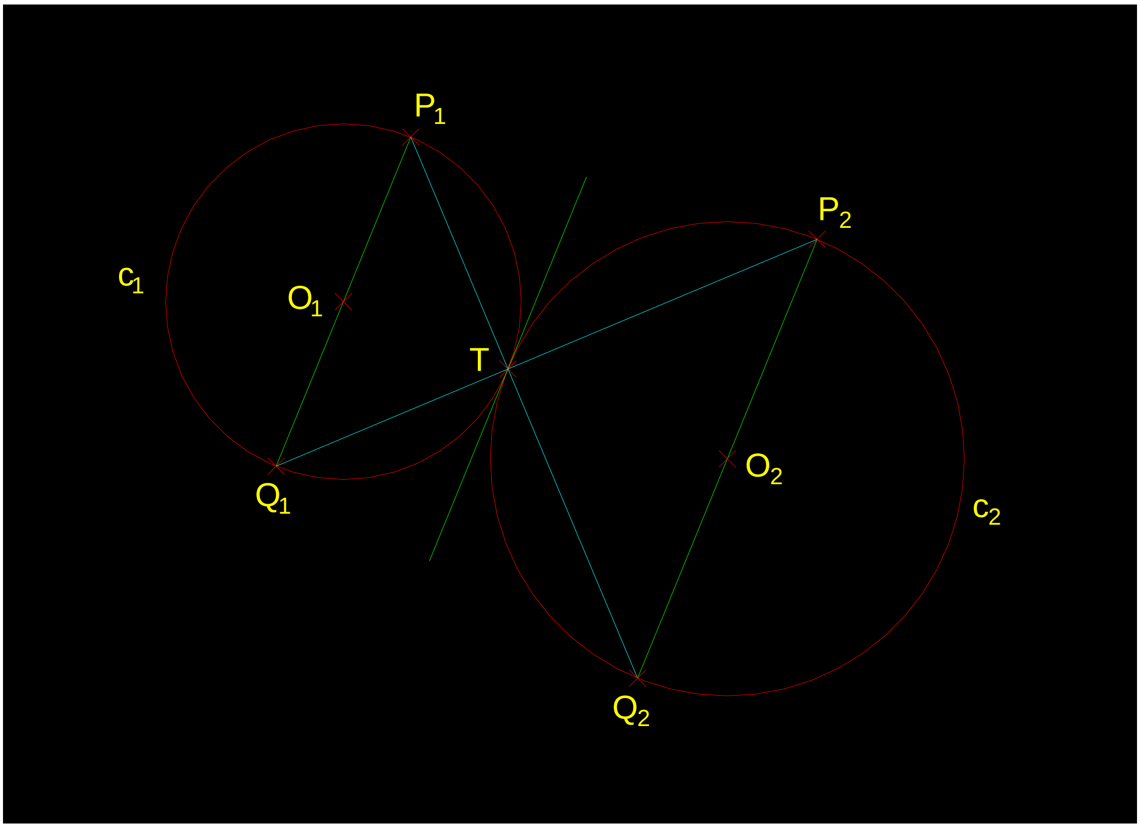

Figura 6.6 – Cuarto teorema de tangencias.

Ejemplo: tangente a una circunferencia c desde un punto P exterior a la misma.

En este caso, para hallar los puntos de tangencia (existen dos soluciones, no sólo una) se debe trazar el segmento PO (siendo O el centro de la circunferencia c) y buscar el punto medio, M, de dicho segmento (por ejemplo trazando la mediatriz del segmento PO). Una vez hallado este punto M, se debe trazar una circunferencia de radio MO, con centro en M. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 buscados se encontrarán donde esta circunferencia corte a la circunferencia c. La recta definida por PO es la bisectriz del ángulo formado por las tangentes, cumpliéndose el segundo teorema de tangencias.

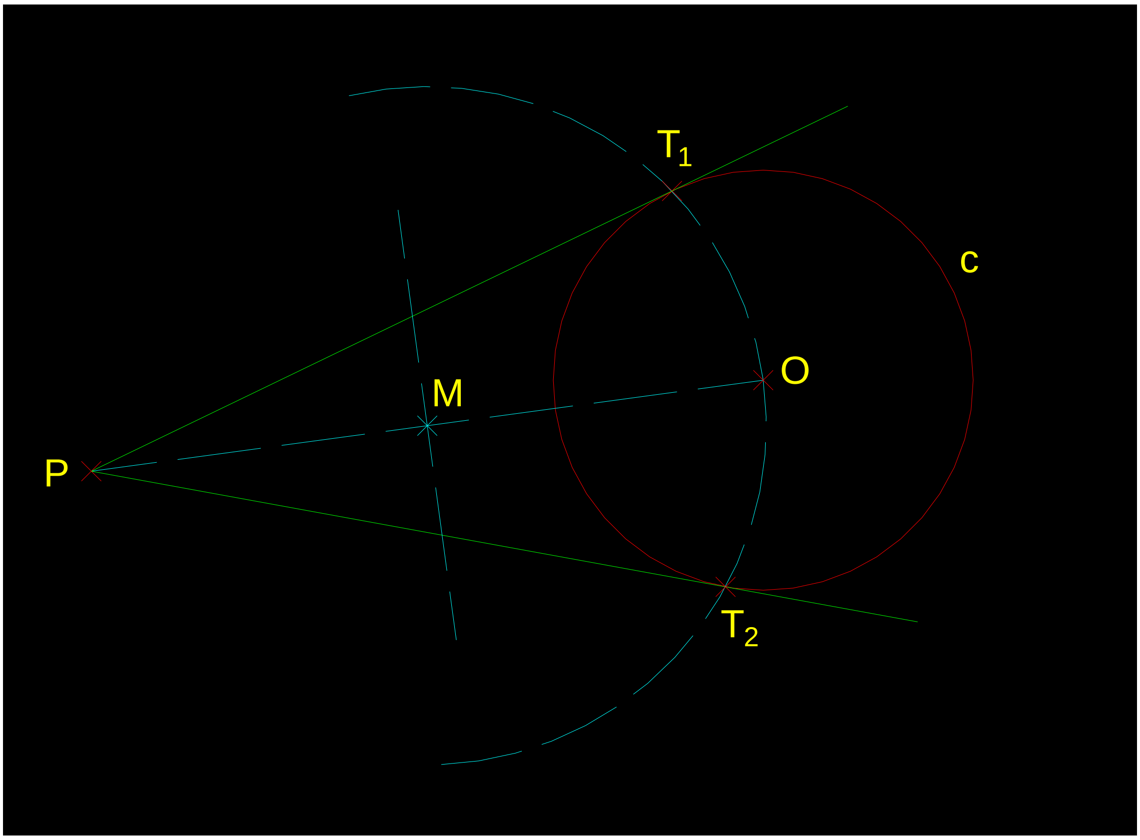

Figura 6.7 – Tangente una circunferencia desde un punto exterior.

6.2 – Enlaces

La unión armónica entre curvas y rectas o de curvas entre sí se denomina **enlace**, y esta unión debe producirse por tangencia.

La construcción de enlaces se realiza en varios pasos:

a) se determinan los radios de las circunferencias tangentes, si dicho radio debe ser fijado con anterioridad.
b) se determinan los puntos de tangencia del problema planteado, si dichos puntos no son conocidos o propocionados de antemano.
c) se trazan las líneas de enlace entre los puntos de tangencia. De este modo el conjunto de líneas, rectas y curvas o curvas entre sí, aparece como una sola línea continua y armónica.

No es posible dar una regla general para construir enlaces (además de la aplicación de los teoremas ya vistos), ya que cada caso particular es diferente y depende del modo en que se quiera construir el enlace. Es más, en algunos casos si se obliga en el problema a cumplir determinados puntos de tangencia y determinados radios, no será posible encontrar una solución. Afortunadamente, las herramientas CAD nos pueden facilitar enormemente la tarea, por lo que vamos a ver sólo dos ejemplos de cómo se podrían hacer estos enlaces de forma manual, para dos casos particulares.

Ejemplo 1 - Enlace de dos rectas oblicuas con un arco de radio r conocido.

En este caso, podemos ver fácilmente que, por el primer teorema de tangencias, el centro de la circunferencia tangente a ambas rectas debe estar sobre una línea paralela a cualquiera de las dos rectas, a distancia r. Aplicando lo mismo a la otra recta obtenemos la intersección de dos rectas paralelas que nos define el centro O del arco. También podemos aplicar el segundo teorema, y ver que el centro de la circunferencia tangente debe estar sobre la bisectriz del ángulo que forman las rectas. Por tanto, o bien aplicando el primer teorema sobre ambas rectas, o bien aplicando el primer teorema sobre una de las rectas, y el segundo teorema sobre ambas, obtendremos la circunferencia buscada. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 surgen automáticamente al trazar la circunferencia de radio r desde el centro O hallado.

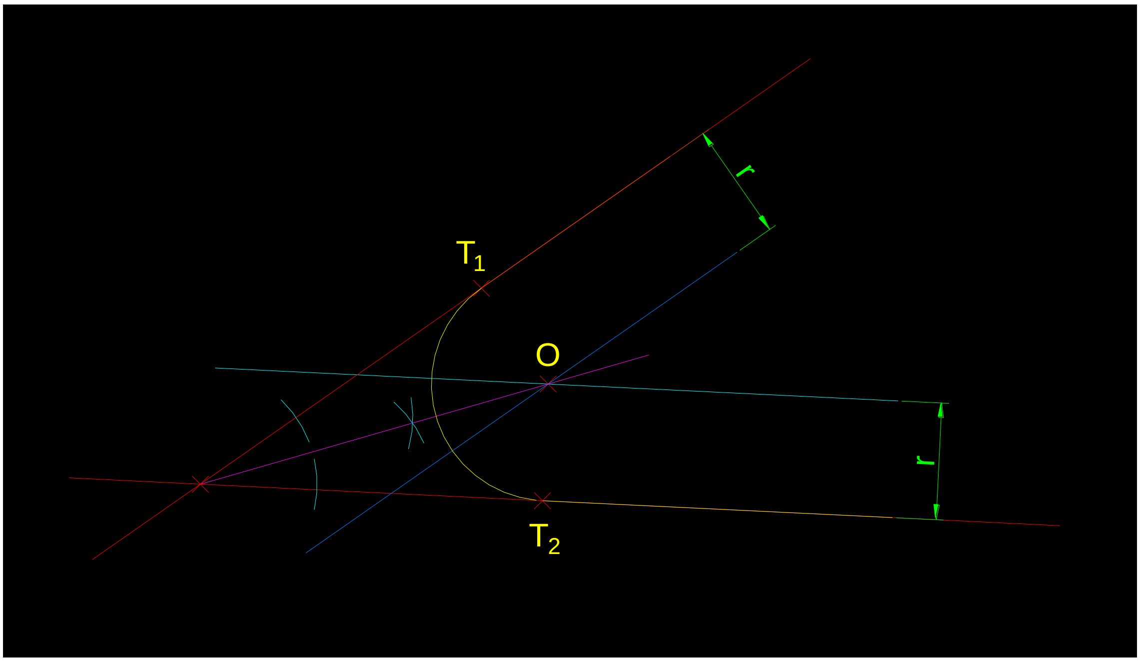

Figura 6.8 – Enlace de dos rectas oblicuas con un único arco de radio conocido.

Ejemplo 2 - Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos de sentido contrario, conociendo dos de los puntos de tangencia T_1 y T_2 y el radio r de uno de los arcos.

En este caso, al conocer uno de los puntos de tangencia y uno de los radios, ya podemos trazar uno de los arcos de circunferencia de manera precisa. Para ello, aplicando el primer teorema, sólo debemos dibujar un segmento perpendicular a una de las rectas, de longitud r, desde el punto de tangencia con dicha recta, T_1. Con ese segmento, obtenemos el punto O_1, que es el centro de uno de los arcos, por lo que ya podemos trazar la circunferencia de radio r y centro O_1.

Para obtener el otro centro, O_2, debemos primero trazar un segmento perpendicular a la otra recta, de longitud r, desde el punto T_2 de dicha recta. Con ello obtenemos el punto A. Uniendo A con O_1 obtenemos el segmento AO_1, cuya mediatriz cortará a la prolongación del segmento AT_2. Dicho punto de corte es el centro, O_2, de la otra circunferencia. El punto de enlace con la primera circunferencia, T_3, se puede hallar trazando el segmento O_1O_2 y viendo que éste intersecta con ambas circunferencias (tercer teorema) en el punto de enlace T_3. En realidad, el punto T_3 surge automáticamente al trazar la circunferencia con centro en O_2 y radio O_2T_2.

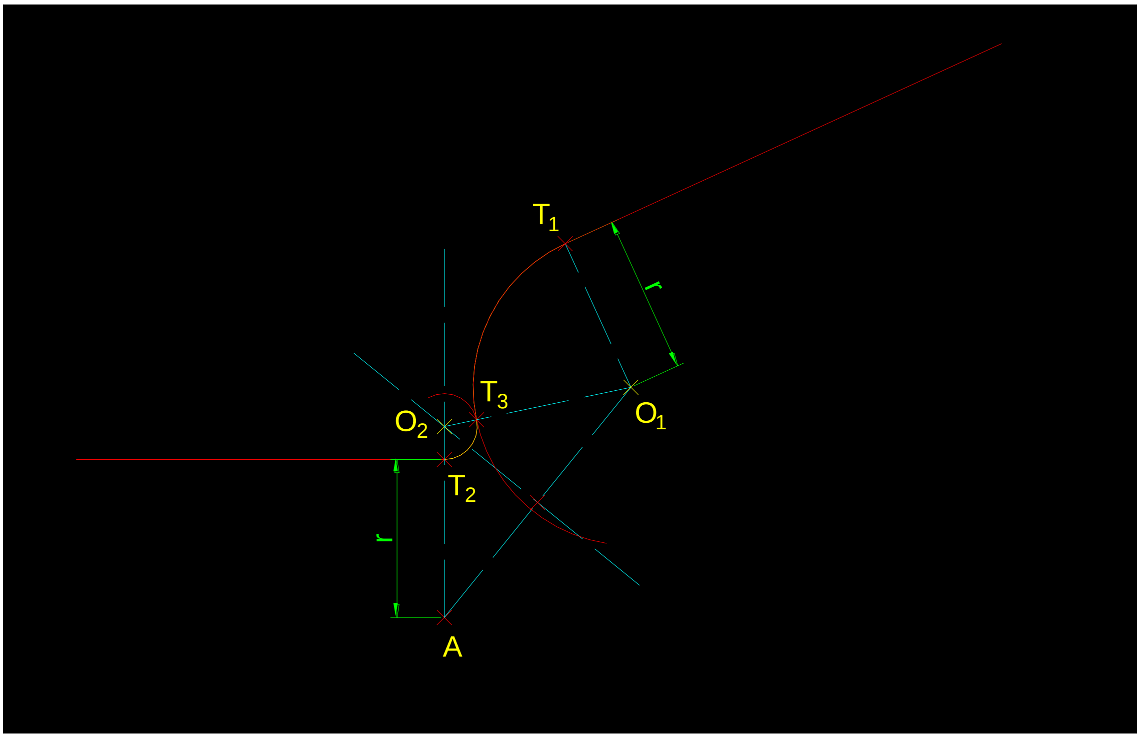

Figura 6.9 – Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos.

6.3 – Polaridad en la Circunferencia

6.3.1 – Eje Radical y Centro Radical

Se define el **eje radical** de dos circunferencias como el lugar geométrico de los puntos del plano que poseen igual potencia respecto de ambas circunferencias. Se puede demostrar que este lugar geométrico es siempre una recta.

El eje radical es siempre perpendicular a la línea recta que une los centros de las circunferencias, llamada **línea de centros**.

Si las circunferencias son **secantes**, el eje radical es la recta que une los puntos de corte. Este caso es el que permite la construcción de algunos de los otros casos.

Si las circunferencias son **exteriores** (no se cortan y no son interiores), el eje radical será perpendicular a línea de centros pero no cortará a ninguna de las circunferencias. Para poder encontrar el eje radical se recurre a una circunferencia auxiliar que sea secante a las otras dos (tiene que ser secante a ambas al mismo tiempo y su centro no debe estar alineado con los otros dos), y se trazan los ejes radicales de cada circunferencia con la auxiliar. La intersección de ambos ejes radicales auxiliares nos da un punto del eje radical buscado. Para poder trazar el eje radical trazaremos una perpendicular a la línea de centros que pase por el punto anteriormente citado. En este caso, el eje radical sólo queda a igual distancia de ambas circunferencias cuando éstan son del mismo radio.

Si las circunferencias son **tangentes** (exterior o interiormente) entre sí, el eje radical coincide con la recta tangente. Es el caso límite de circunferencias secantes.

Si una circunferencia es **interior** a la otra (pero no son concéntricas), el eje radical es una perpendicular a la línea de centros, que es exterior a la circunferencia. Para trazar el eje radical se recurre al mismo procedimiento que en el caso de circunferencias exteriores: trazar una circunferencia auxiliar secante a ambas y buscar sus ejes radicales con las circunferencias.

Si las circunferencias son **concéntricas**, no existe eje radical, ya que no es posible encontrar puntos que tengan la misma potencia respecto a ambas. Si se realiza el procedimiento de la circunferencia auxiliar se observa que los ejes radicales auxiliares son paralelos, por lo que no es posible hallar su intersección.

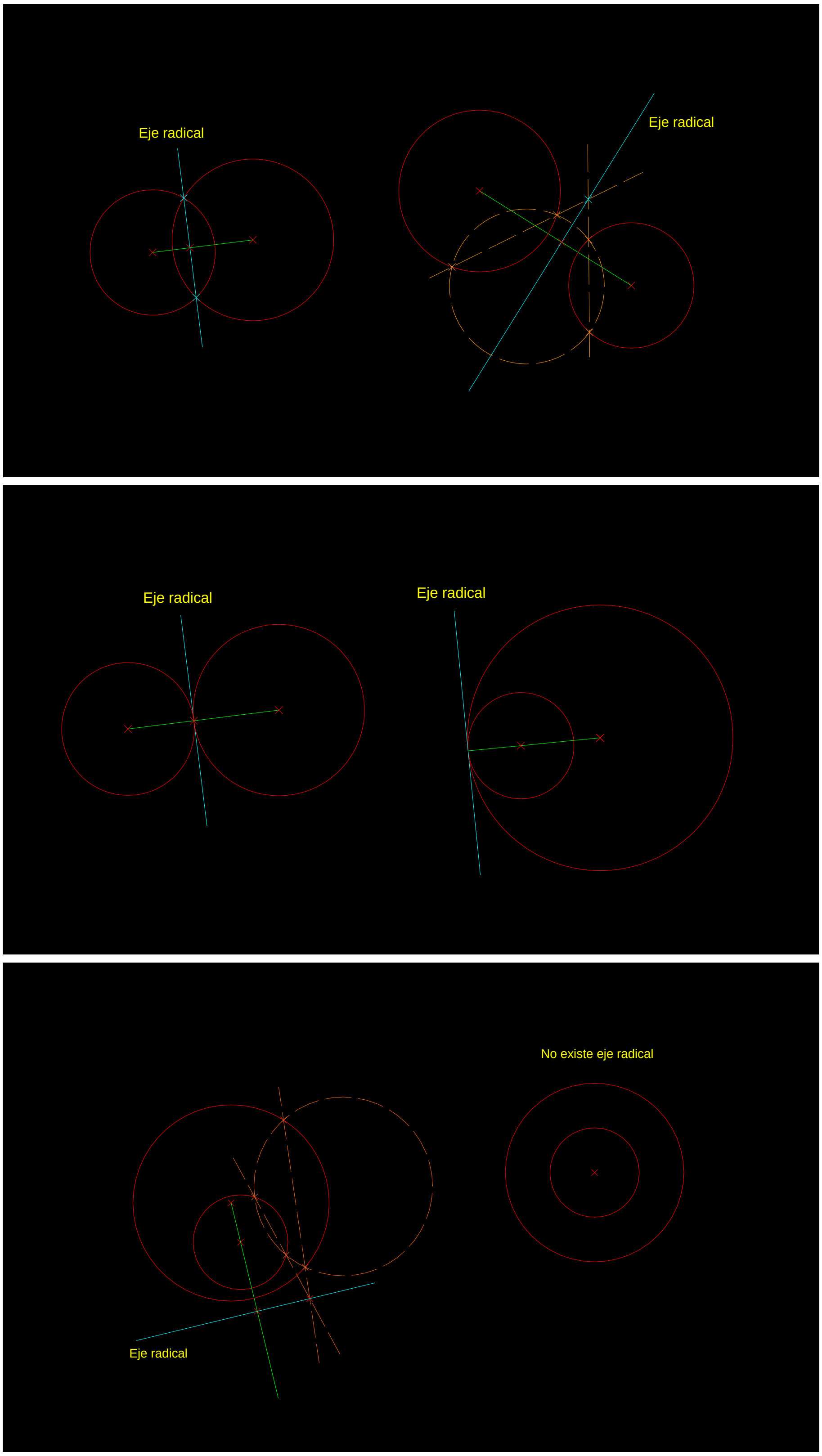

Figura 6.10 – Eje radical de dos circunferencias.

De igual modo, se llama **centro radical** de tres circunferencias al punto, tal que, la potencia respecto de las tres circunferencias es igual. El centro radical es la intersección de los ejes radicales de las circunferencias tomadas dos a dos.

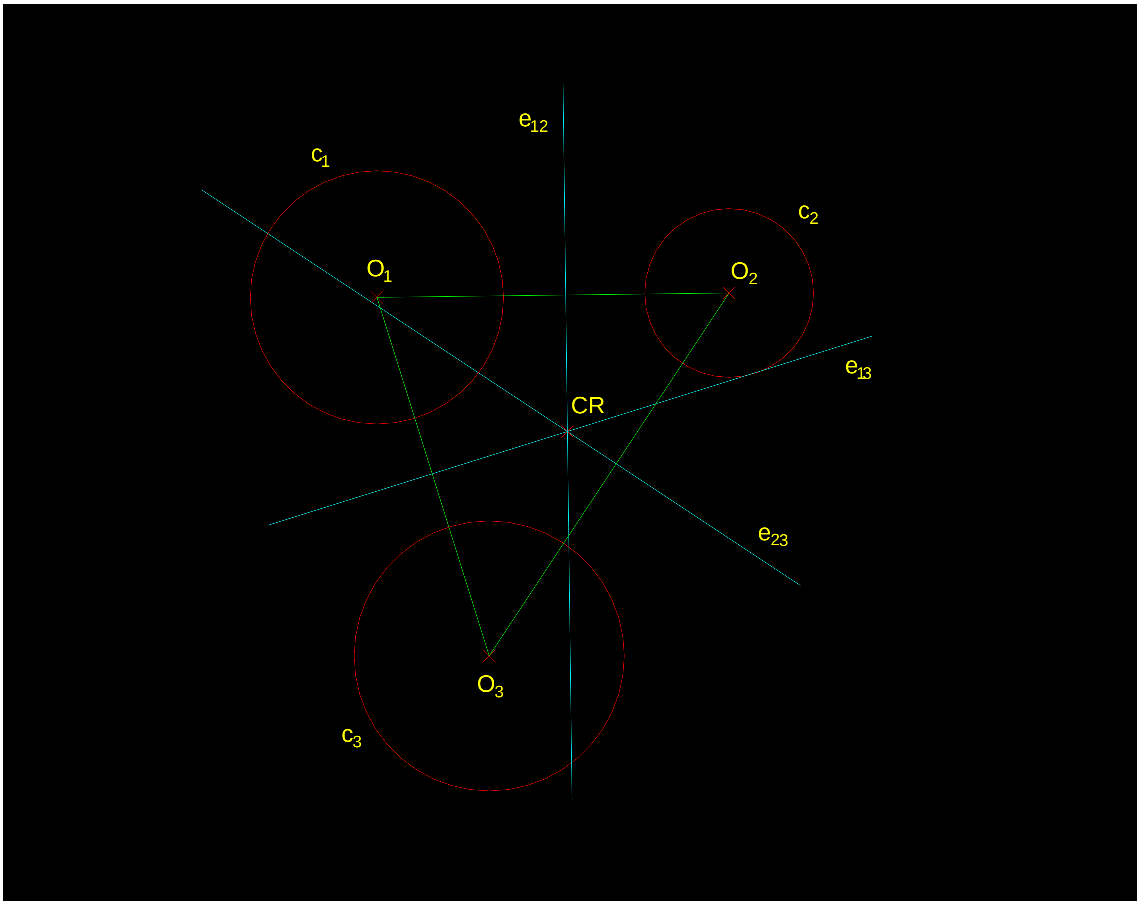

Figura 6.11 – Centro radical de tres circunferencias.

6.3.2 – Polo y Polar

A partir del concepto de eje radical, podemos definir el concepto de recta polar. La **recta polar** (a veces llamada simplemente **polar**) de un punto P (al que se llama **polo**) y una circunferencia c de centro O (también llamada circunferencia directora) es el eje radical de esa circunferencia y aquella cuyo diámetro es el segmento PO.

Por lo visto para el eje radical, si el polo es exterior a la circunferencia, la recta polar corta a la circunferencia. Si el polo está sobre la circunferencia, la polar es la tangente a la misma. Si el polo está dentro de la circunferencia, la polar es exterior a la misma.

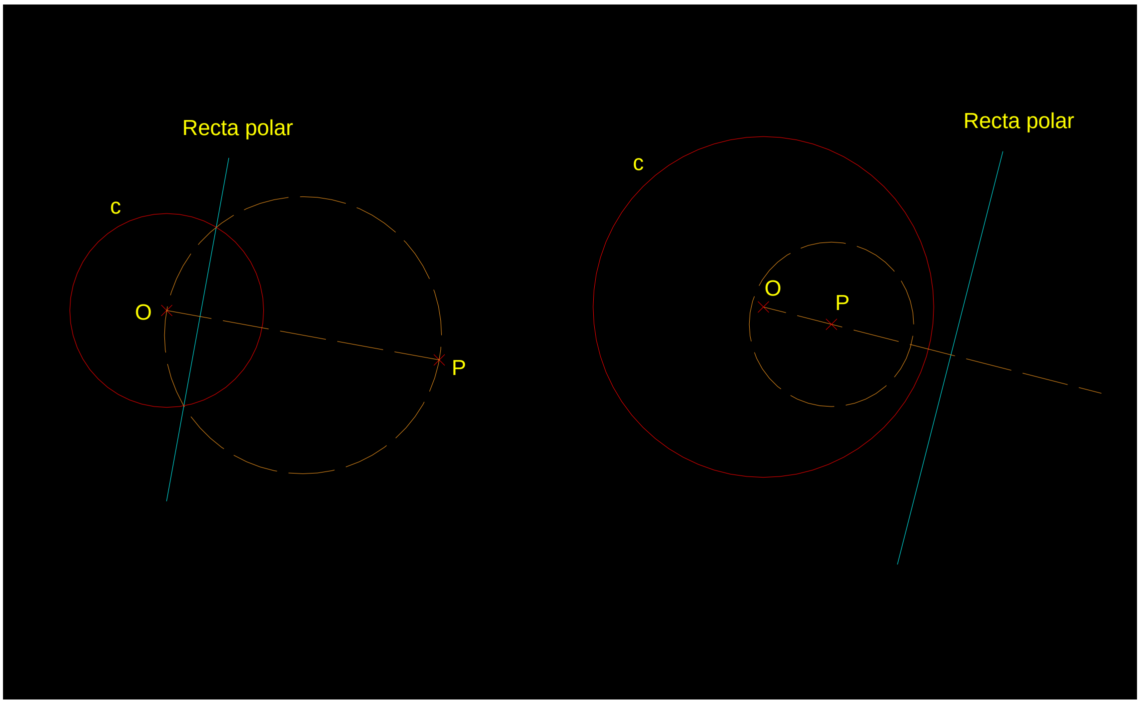

Figura 6.12 – Recta polar de un punto.

Dos puntos que tienen la propiedad de que la polar de uno pasa por el otro, son **puntos conjugados**; y dos líneas, que sean de modo que el polo de cada una esté en la otra, son líneas conjugadas.

Por eso, la recta polar de un punto P respecto a una circunferencia c es el lugar geométrico de los puntos conjugados de P respecto de la circunferencia c.

Un **triángulo** es **autopolar** o **autoconjugado** con respecto a una circunferencia c, cuando cada vértice es el polo del lado opuesto con respecto a c.

En realidad, el concepto de polaridad en la circunferencia es una particularización del concepto de polaridad en cónicas, por lo que el concepto se puede aplicar también a elipses, hipérbolas y parábolas. El concepto de polaridad en cónicas tiene aplicaciones prácticas sobre todo en física, y es parte de un extenso campo de estudio denominado **geometría proyectiva**.