Tema 5

Transformaciones, Proporcionalidad y Escalas

En este tema trataremos algunos de los conceptos más importantes a la hora de realizar dibujos que permitan expresar ideas u objetos de la realidad. En concreto veremos en detalle el concepto de escala, repasando previamente conceptos relacionados con él, como el de proporcionalidad y semejanza. Estudiaremos también el concepto de transformación geométrica y sus posibles tipos.

5.1 – Transformaciones Geométricas

Una **transformación geométrica** es una operación que, a cada punto de un espacio vectorial le hace corresponder otro punto del mismo espacio vectorial, de modo que las figuras se transforman en otras figuras que son, en general, diferentes. La figura que se le hace corresponder se denomina figura **homóloga**.

Las transformaciones geométricas que estudiaremos en este tema serán transformaciones geométricas en el plano, aunque muchas de las definiciones son extrapolables a tres dimensiones de manera sencilla o incluso trivial.

Las transformaciones geométricas en el plano permiten, por tanto, obtener una nueva figura plana a partir de otra dada previamente, mediante el establecimiento de una serie de correspondencias entre elementos (normalmente puntos, segmentos o curvas) que definen la figura.

De forma más formal, podemos definir una transformación geométrica en el espacio vectorial V como toda aplicación biyectiva t que a cada elemento V le hace corresponder otro elemento de V. El punto $P' = t(P)$ se denomina transformado, homólogo o imagen del punto P.

Se llaman **ecuaciones de la transformación** a las ecuaciones que permiten calcular las coordenadas del punto transformado $P'(x, y)$ a partir de las de un punto $P(x, y)$ dado (suponiendo que estamos trabajando en dos dimensiones).

Ejemplo: $t((x,y)) = (2x,3y)$

Con esta ecuación, podríamos realizar las siguientes transformaciones:

$$t((2,3)) = (4,9)$$
$$t((0,0)) = (0,0)$$
$$t((4,1)) = (8,3)$$

En este curso sólo consideraremos transformaciones geométricas en el plano (en este tema) y en el espacio (posteriormente), aunque se pueden definir para dimensiones superiores a tres.

En una transformación geométrica, los elementos que se corresponden consigo mismos al aplicar la transformación (es decir, los que se transforman en sí mismos), se les llama elementos **invariantes, fijos** o **dobles**. En el ejemplo anterior, el punto $(0,0)$ sería un punto invariante, puesto no cambia al aplicar la transformación.

5.1.1 – Tipos de Transformaciones Geométricas

Las transformaciones geométricas se pueden clasificar según cual sea el resultado de la transformación con respecto al elemento original.

Si la transformación geométrica produce una figura del mismo tamaño y forma que la original, se le denomina **transformación isométrica**.

Si la transformación geométrica produce una figura de distinto tamaño pero igual forma que la original, se le denomina **transformación isomórfica**.

Si la transformación geométrica produce una figura de distinto tamaño y distinta forma que la original, se le denomina **transformación anamórfica**.

A su vez, se llama **transformación directa**, (par o positiva) a toda transformación geométrica que conserva la orientación de los ángulos.

Por el contrario, se llama **transformación inversa**, impar o negativa a toda transformación geométrica que modifica la orientación de los ángulos.

5.1.2 –Transformaciones Isométricas

Las transformaciones isométricas, también llamadas **movimientos**, son aquellas transformaciones en las que la figura original no es deformada, y ésta simplemente cambia de posición o/y orientación. En las isometrías, por tanto, se conservan, tanto las medidas de los segmentos como los ángulos entre los mismos.

Existen varios tipos de transformaciones isométricas: la traslación, el giro, la simetría central y la simetría axial.

5.1.2.1 – Traslación

Una **traslación** es una transformación geométrica, que, dado un vector $\vec{v}$, asocia a cada punto P del plano otro punto P' de forma que se verifique que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es exactamente igual al vector $\vec{v}$.

Dicho de otro modo, se trata de sumar el vector $\vec{v}$ a todos los puntos de la figura original, resultando una nueva figura que es idéntica a la original pero desplazada. El vector $\vec{v}$ puede expresarse en forma vectorial (expresando una magnitud y una dirección), o a partir de un punto base y un punto destino, cuya substracción da lugar al vector.

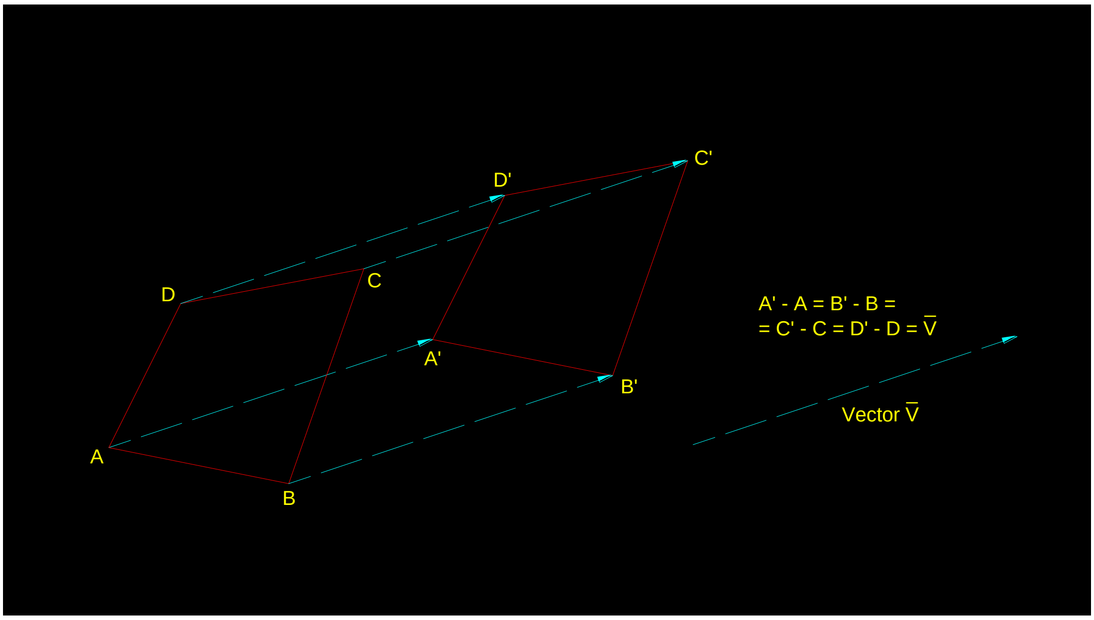

Figura 5.1 – Traslación.

Toda traslación es una isometría directa, puesto que los ángulos mantienen la misma orientación y las magnitudes se conservan. Por tanto, toda traslación transforma rectas en rectas paralelas a ellas. Los elementos dobles de la traslación son las rectas paralelas al vector $\vec{v}$.

La extrapolación de la traslación a tres dimensiones es trivial, dado que el procedimiento es exactamente el mismo pero empleando un vector de tres dimensiones.

5.1.2.2 – Giro

Dado un punto O del plano y un ángulo α, se llama **giro** de centro O y ángulo (o amplitud) α, a la transformación que asocia a cada punto P del plano otro punto P' de forma que se verifique que la distancia OP es la misma que la distancia OP', y además el ángulo $\widehat{POP'}$ es igual a α.

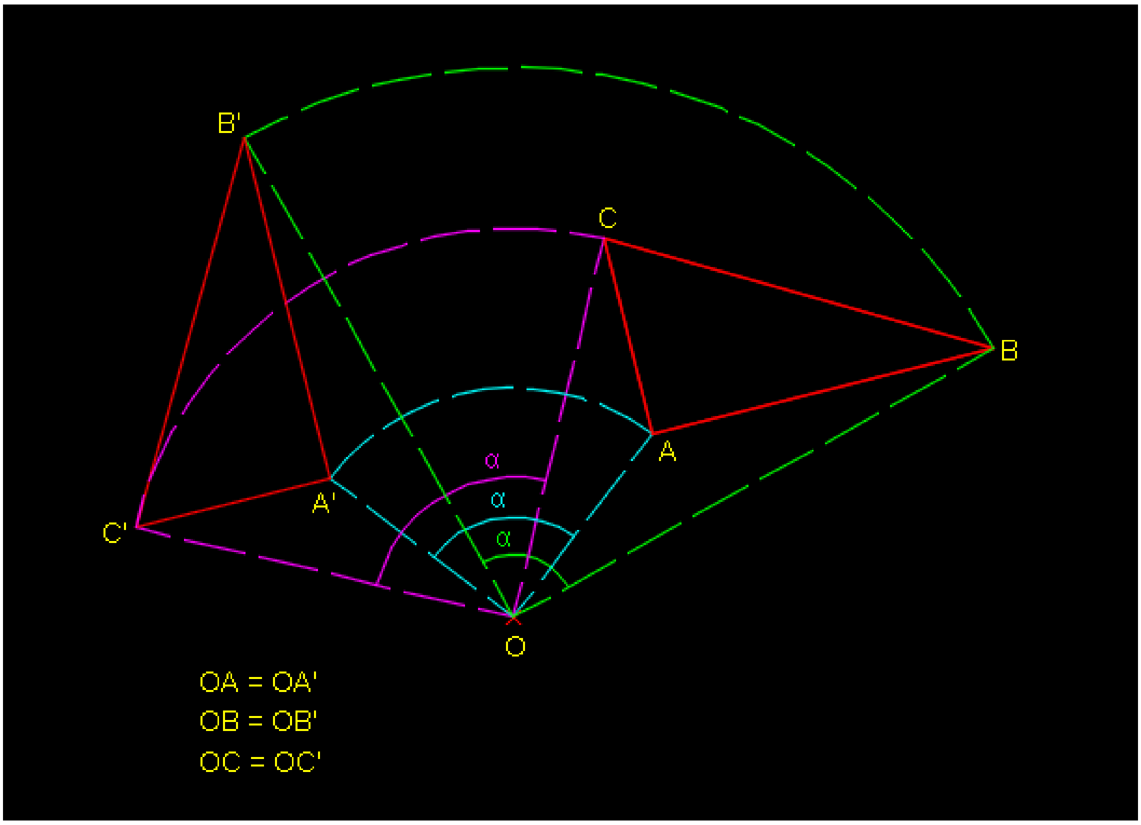

Figura 5.2 – Giro.

Todo giro es una isometría directa. El único punto doble de un giro es el propio centro, dado que todos los demás sufren un desplazamiento.

Es importante, además, no confundir giro con rotación. Hablamos de **rotación** para describir a aquellos giros que se producen empleando como centro de giro un punto tal que sea el **centro geométrico** de la figura. Por tanto, la rotación es un caso particular de giro con un centro determinado.

La extrapolación a tres dimensiones es algo más compleja que en el caso de la traslación, ya que, en lugar de un centro de giro, hay que especificar un eje de giro.

5.1.2.3 – Simetría Central

Dado un punto O del plano, se llama simetría central con centro en O, a la transformación que asocia a cada punto P del plano otro punto P' de forma que se verifique que la distancia OP es la misma que la distancia OP', y además P, O y P' están alineados.

En realidad, una simetría central en el plano es un caso particular de giro con ángulo igual a 180°, por lo que una simetría central en el plano es siempre una isometría directa y el único punto doble de una simetría central es su centro.

Por tanto, podríamos definir la simetría central de centro O como el giro de centro O y ángulo de 180°.

La simetría central es extrapolable a tres dimensiones, aunque en este caso, las propiedades son distintas, puesto que, curiosamente, sería una isometría inversa, ya que invierte las orientaciones de los ángulos.

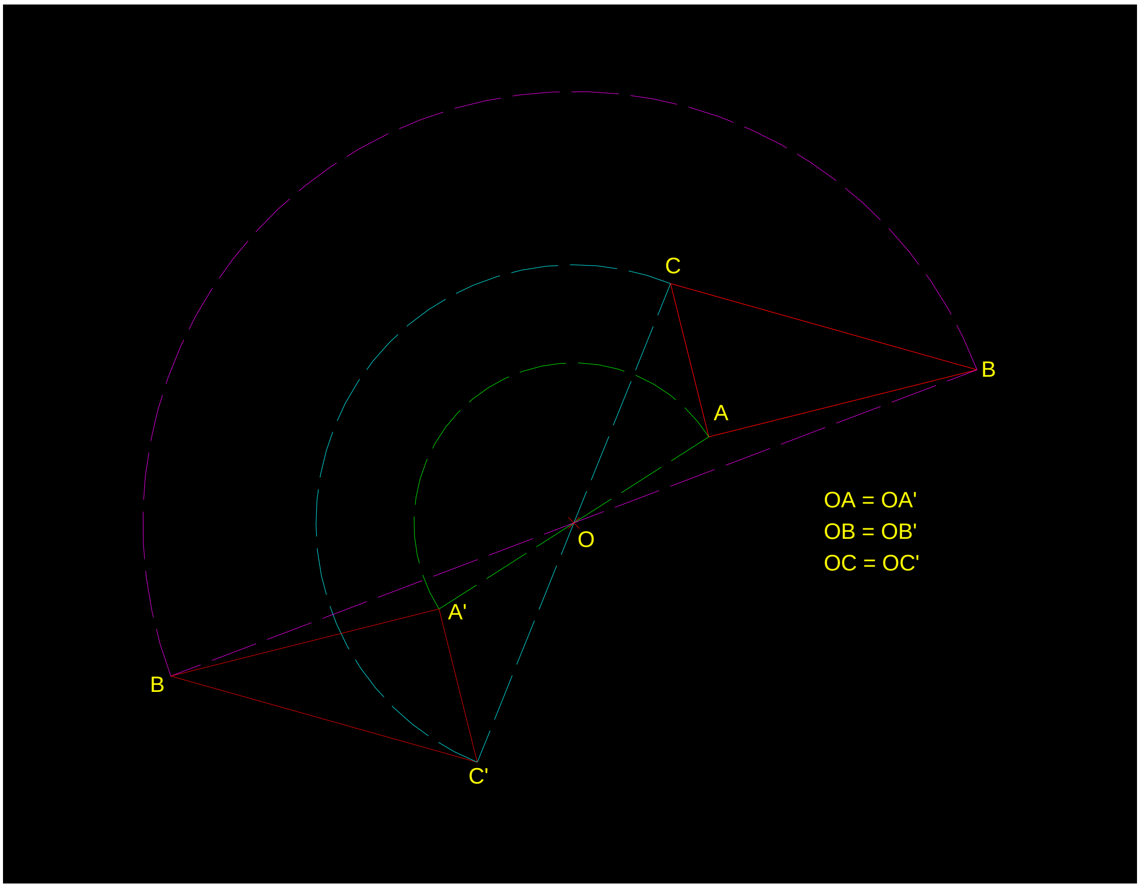

Figura 5.3 – Simetría central.

5.1.2.4 – Simetría Axial

Dada una recta s, que denominaremos **recta** o **eje de simetría**, definimos la **simetría axial** como la transformación geométrica que, dado un punto P del plano, le hace corresponder otro punto P' de forma que se verifique que la recta s sea la mediatriz del segmento PP'. Dicho de otro modo, el punto P' se obtiene trazando una perpendicular a s desde P y prolongando esta perpendicular la misma distancia que exista entre P y la recta s.

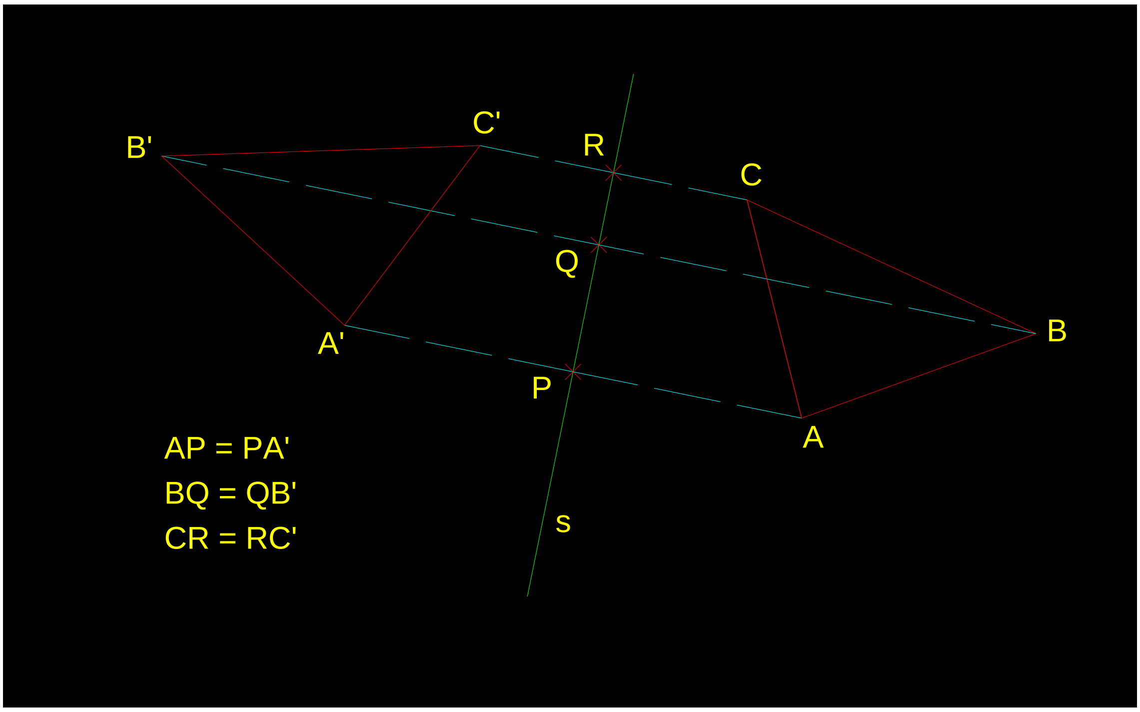

Figura 5.4 – Simetría axial.

Toda simetría axial es una isometría inversa. Los únicos puntos dobles de una simetría axial son los puntos del propio eje de simetría, ya que todos los demás son trasportados al otro lado del mismo. Las rectas perpendiculares a dicho eje son rectas dobles, puesto que se transforman en sí mismas.

La simetría axial es extrapolable a tres dimensiones, aunque en este caso, las propiedades son distintas, puesto que en tres dimensiones, a diferencia de lo que ocurre con la simetría central, es una isometría directa. Esto es debido a que, en tres dimensiones, una simetría axial de eje s es lo mismo que un giro de eje s y amplitud 180° (y los giros siempre son isometrías directas, también en tres dimensiones).

5.1.3 – Transformaciones Isomórficas

5.1.3.1 – Homotecia

La **homotecia** es una transformación geométrica en la que a cada punto P se le hace corresponder otro punto P' estando ambos alineados con un punto fijo O, al que llamamos centro de la homotecia, cumpliéndose además que $OP' = K \cdot OP$, siendo K una magnitud a la que llamamos **razón de la homotecia**.

La homotecia se dice **directa** cuando ambos puntos (original y transformado) están a un mismo lado del centro. En ese caso la razón K se define como positiva ($K > 0$), y es una transformación isomórfica directa.

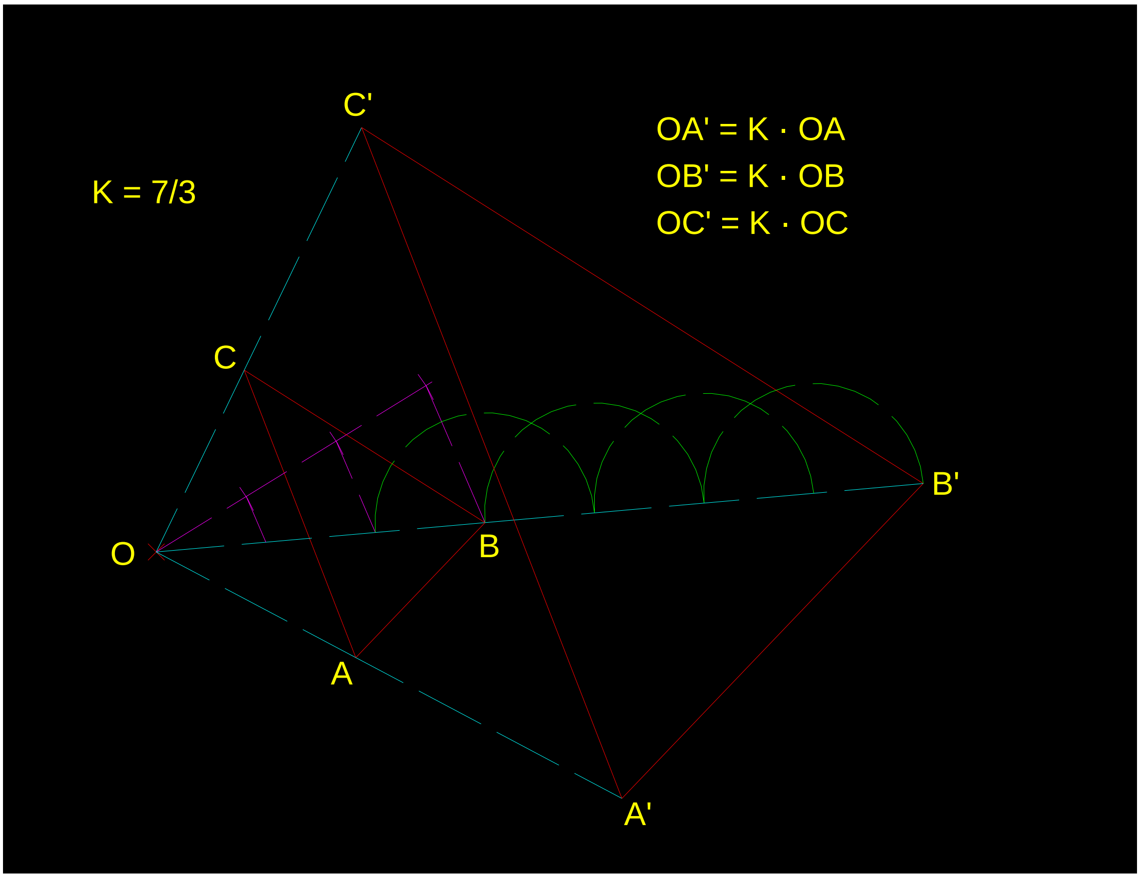

Figura 5.5 – Homotecia directa.

La homotecia se dice **inversa** cuando los puntos (original y transformado) están a lados distintos respecto del centro. En ese caso la razón K se define como negativa ($K < 0$), y es una transformación isomórfica inversa.

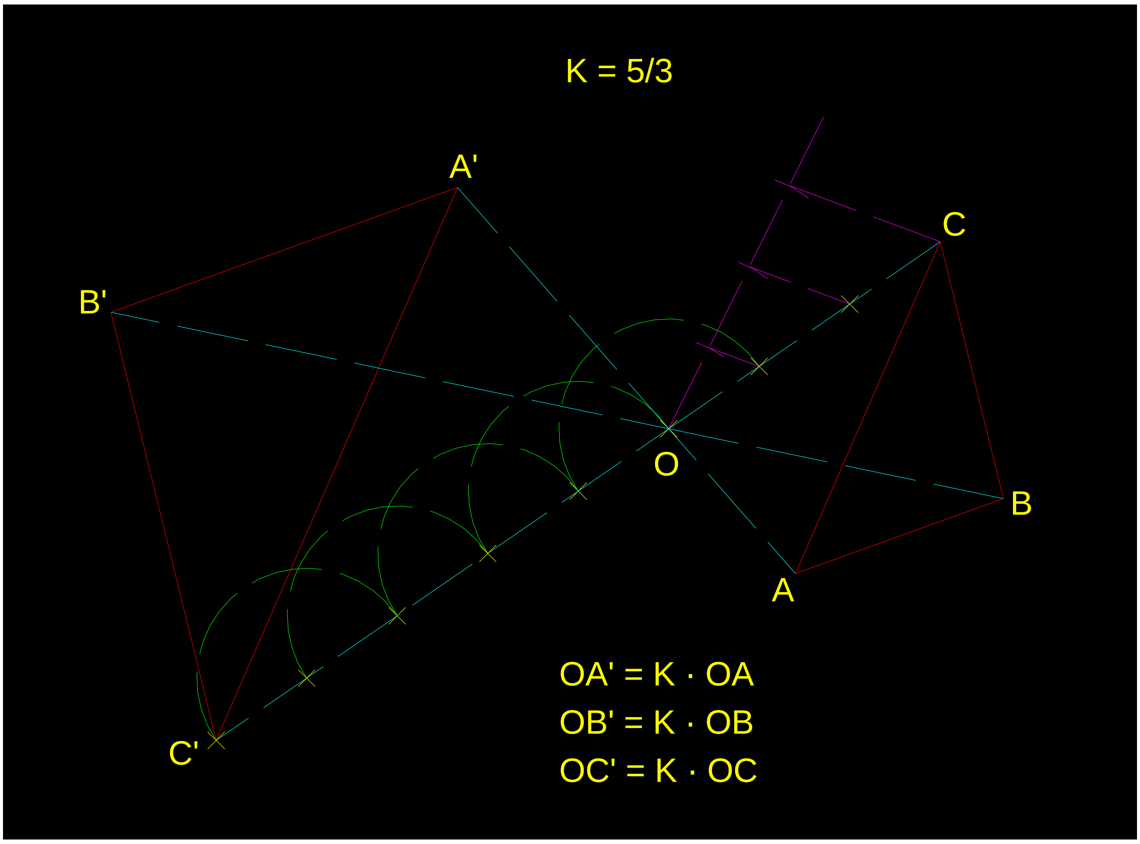

Figura 5.6 – Homotecia inversa.

En ambos casos, la homotecia puede ser de ampliación ($|K| > 1$) cuando hace más grande la figura, de reducción ($|K| < 1$) cuando la hace más pequeña, o de igualdad ($|K| = 1$) si no cambia el tamaño.

La homotecia es extrapolable a tres dimensiones de forma análoga a como se realiza en dos dimensiones.

Además, cuando dos segmentos o figuras guardan una relación de distancias (con respecto a un punto) igual a K, se dice que ambos elementos son **homotéticos**, puesto que provienen de realizar una homotecia entre ellos.

5.1.3.2 – Escalado

Muchas veces se habla de homotecia y escalado como sinónimos. El escalado suele definirse como una transformación geométrica isomórfica que establece una relación constante entre las dimensiones de un objeto transformado y las dimensiones del original.

En realidad, una homotecia también establece una relación de este tipo, aunque lo hace con respecto a un punto (el centro de homotecia), pero las dimensiones del dibujo transformado y las del original guardan una relación igual a la de la razón de la homotecia.

El escalado se suele definir como la relación constante entre las dimensiones de un objeto transformado con respecto a sus dimensiones originales. Aunque ambos términos (escalado y homotecia) pueden considerarse sinónimos, la escala, a diferencia de la homotecia, no suele especificarse en términos de un centro, ya que se supone que se hace con respecto al centro geométrico de la figura, o con respecto al centro del sistema de coordenadas. Al igual que en la homotecia, el escalado se hace con respecto a una razón K, que suele denominarse factor de escalado.

Algebraicamente, se suele definir como:

$$E((x, y)) = (K \cdot x, K \cdot y)$$

donde las coordenadas x, y pueden ser relativas al centro de la figura, o absolutas (con respecto al origen de coordenadas). Además, algunas veces se especifican factores de escalado diferentes (K_x, K_y) para los diferentes ejes de coordenadas, pudiendo realizarse un escalado en la coordenada x diferente al de la coordenada y.

Como vemos, en realidad es algo muy similar a la homotecia, aunque con matices ligeramente diferentes, ya que el escalado, definido así, siempre es una transformación directa.

La extensión de este concepto para denotar la relación constante entre las dimensiones de la representación de un objeto con respecto a sus dimensiones originales en la realidad, da lugar al concepto de "dibujo a escala" que veremos más adelante.

5.1.4 – Transformaciones Anamórficas

Las transformaciones anamórficas son aquellas en las que la figura transformada no conserva, en general, ni la forma ni el tamaño de la figura original. Dado que no se conservan estas dos propiedades fundamentales, su estudio es de menor interés que el de las transformaciones isométricas o isomórficas.

5.1.4.1 – Transformaciones Anamórficas de Equivalencia

Dentro de las trasformaciones anamórficas, podemos encontrar algunas transformaciones que, aunque no conservan ni la forma ni las longitudes de los segmentos de la figura, sí que cumplen algunas otras propiedades que pueden ser de interés.

Por ejemplo, se denominan **figuras equivalentes** a aquellas que, teniendo diferente forma y dimensiones longitudinales, tienen igual área.

La obtención de figuras equivalentes define un tipo particular de transformación anamórfica (**no todas las transformaciones anamórficas son de equivalencia**) en el que la superficie de la figura se conserva, aunque la forma y las dimensiones de los segmentos no lo hacen.

El ejemplo más sencillo de transformación anamórfica de equivalencia es el de los triángulos equivalentes, puesto que todos los triángulos que tengan la misma base y altura tienen la misma superficie. Por tanto, si el vértice opuesto a la base está sobre una recta paralela a dicha base, los triángulos serán equivalentes.

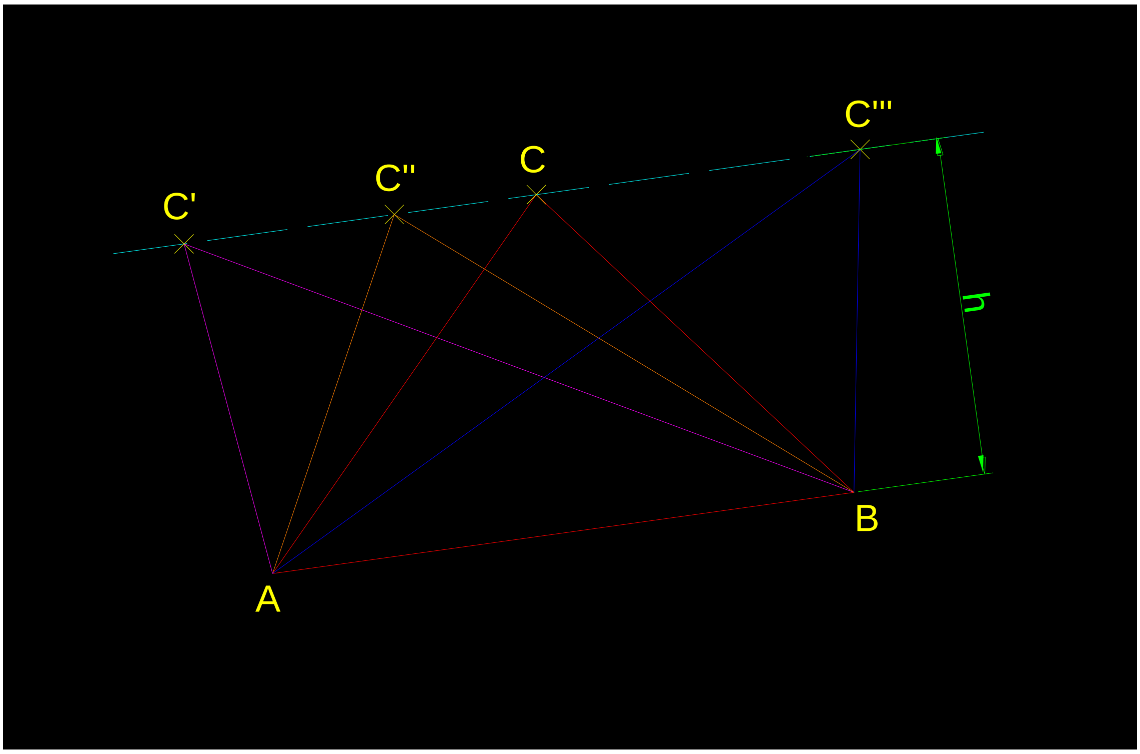

Figura 5.7 – Transformación anamórfica de equivalencia en triángulos.

A partir de la equivalencia de triángulos a nivel de área, podemos describir un método general para construir un polígono equivalente a otro dado, que tenga un número igual de lados menos uno. Es decir, si se parte de una forma poligonal de seis lados, se puede pasar a una de cinco y, con una nueva aplicación del procedimiento, a otra de cuatro y así sucesivamente, hasta llegar a un mínimo de tres.

El procedimiento consiste en escoger tres vértices consecutivos del polígono. Estos tres vértices formarán siempre un triángulo, que podemos transformar en un triángulo equivalente tal que, dos de sus vértices estén alineados con un cuarto vértice del polígono. Esto nos permitirá eliminar uno de los vértices del mismo.

En la figura podemos ver un ejemplo, en el que el triángulo AFE se puede convertir en el triángulo $AF'E$. Como F', A y B están alineados, el vértice A se puede eliminar, por lo que el polígono (hexágono) $ABCDEF$ se puede convertir en el pentágono (polígono de un lado menos) $BCDEF'$. Lo mismo se puede aplicar al triángulo CDE para pasar de un pentágono a un cuadrilátero. Y podría volverse a repetirse el proceso hasta formar un triángulo de igual área que el hexágono original.

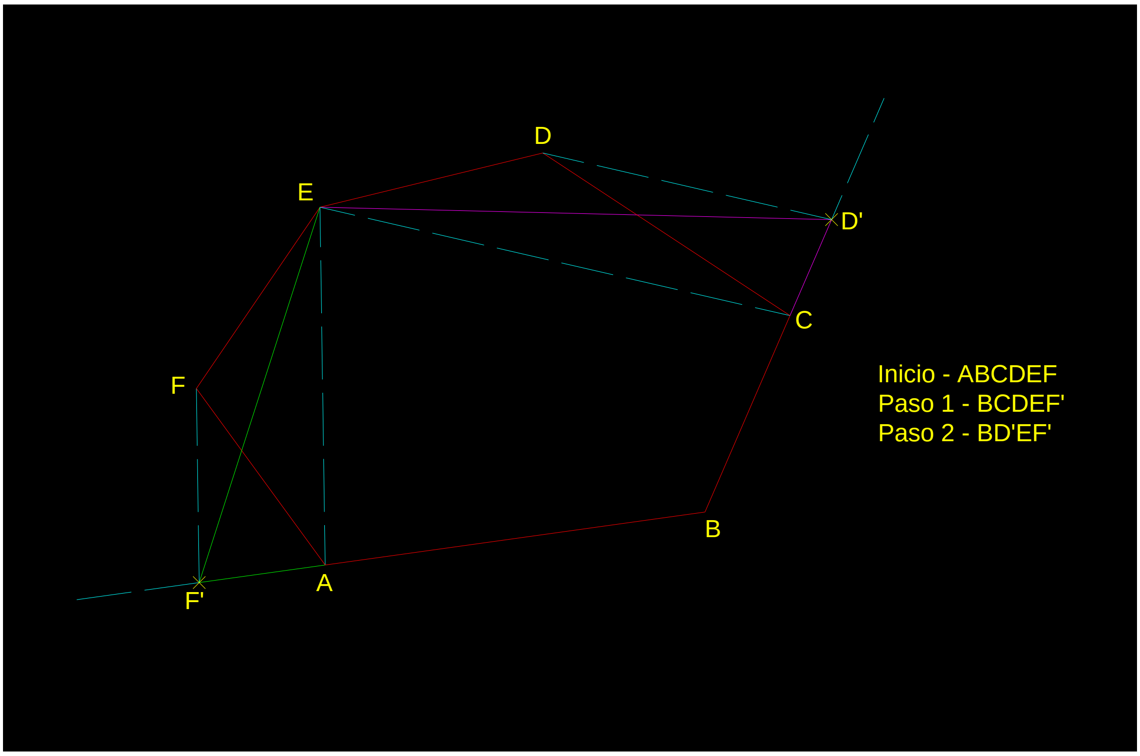

Figura 5.8 – Método general para obtener polígonos equivalentes de menor número de lados.

Existen también métodos para realizar procesos inversos, como construir un cuadrado a partir de un triángulo, o incluso para realizar cuadrados (aproximadamente) equivalentes a circunferencias.

En la figura siguiente vemos un ejemplo de cómo pasar de un triángulo ABC a un cuadrado $AGHI$ de igual superficie.

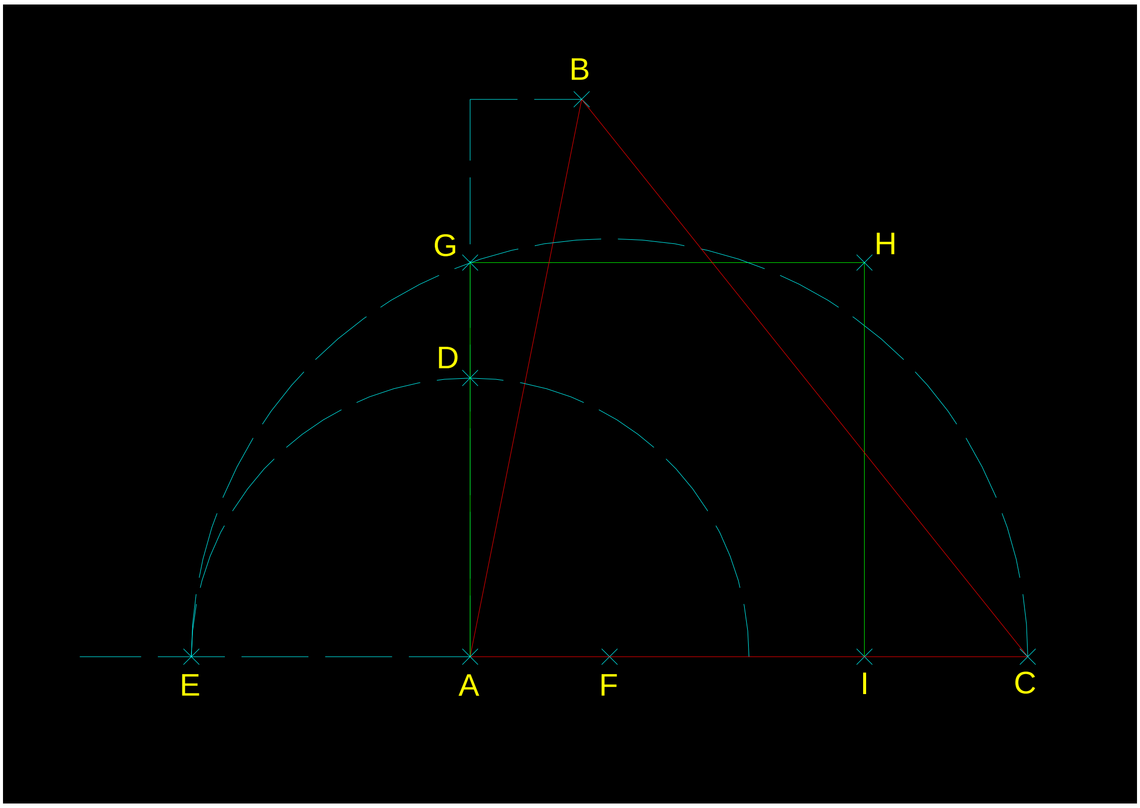

Figura 5.9 – Obtención de un cuadrado equivalente
a un triángulo de manera geométrica.

A este último problema, consistente en hallar geométricamente (con sólo regla y compás), un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado, se le denomina **cuadratura del círculo**, y es un problema geométrico irresoluble. Sólo se pueden ofrecer soluciones aproximadas, ya que la solución exacta no se puede obtener de manera geométrica.

Sin embargo, en otros tiempos constituyó un problema de fama universal, y numerosos matemáticos soñaron con la fama que les proporcionaría resolver este problema, por lo que se ofuscaron, sin éxito, en resolverlo. Es por ello que en sentido figurado, se dice de algo que es la "cuadratura del círculo" cuando representa un problema muy difícil o imposible de resolver.

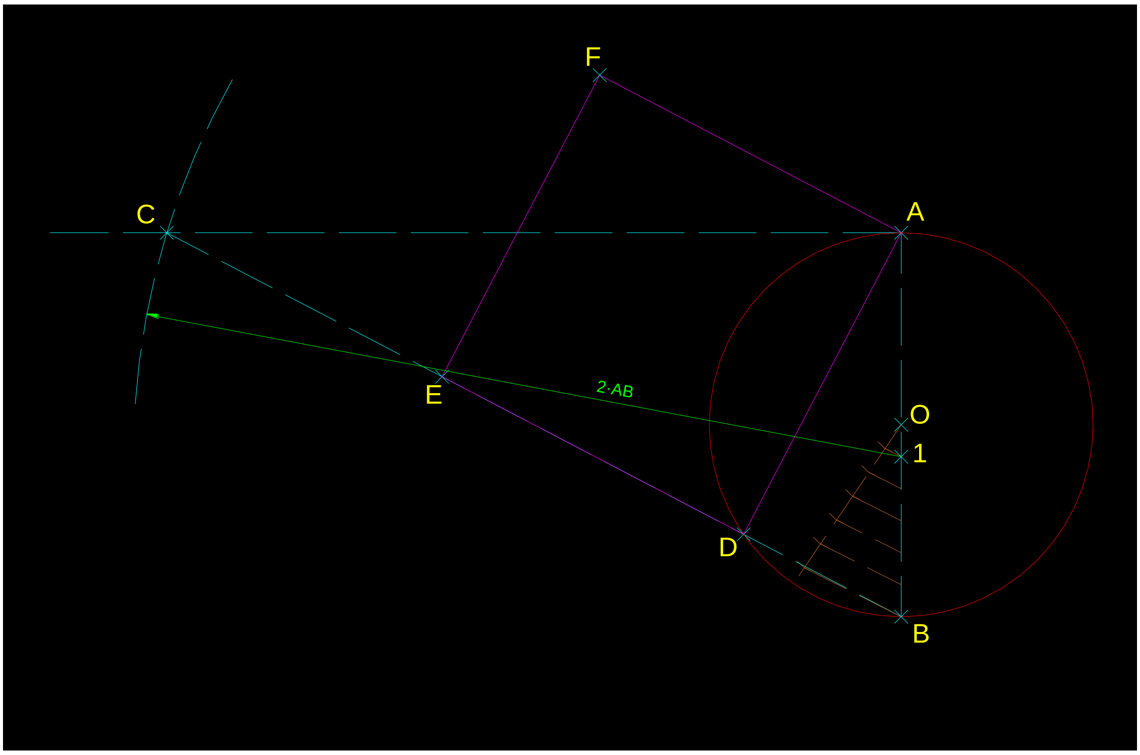

Figura 5.10 – Ejemplo de método aproximado para realizar geométricamente la cuadratura del círculo.

5.1.4.2 – Equicomposición

Una manera sencilla de obtener figuras que sean equivalentes (en área) a otras dadas es la equicomposición.

Se denomina **figuras equicompuestas** a aquellas que están formadas por diferentes partes que han sido reordenadas para formar una nueva figura. Se llama **equicomposición** a la construcción de una figura a partir de otra, que esté formada por las partes de aquella.

La equicomposición es obviamente una transformación anamórfica (porque las figuras son de diferente forma) de equivalencia, ya que las figuras equicompuestas son equivalentes, pues sus áreas son iguales.

Para que se establezca una equicomposición, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1) Que cada figura tenga el mismo número de partes.
2) Que el número de partes sea finito.

3) Que cada parte tenga su respectiva igual en cada figura.

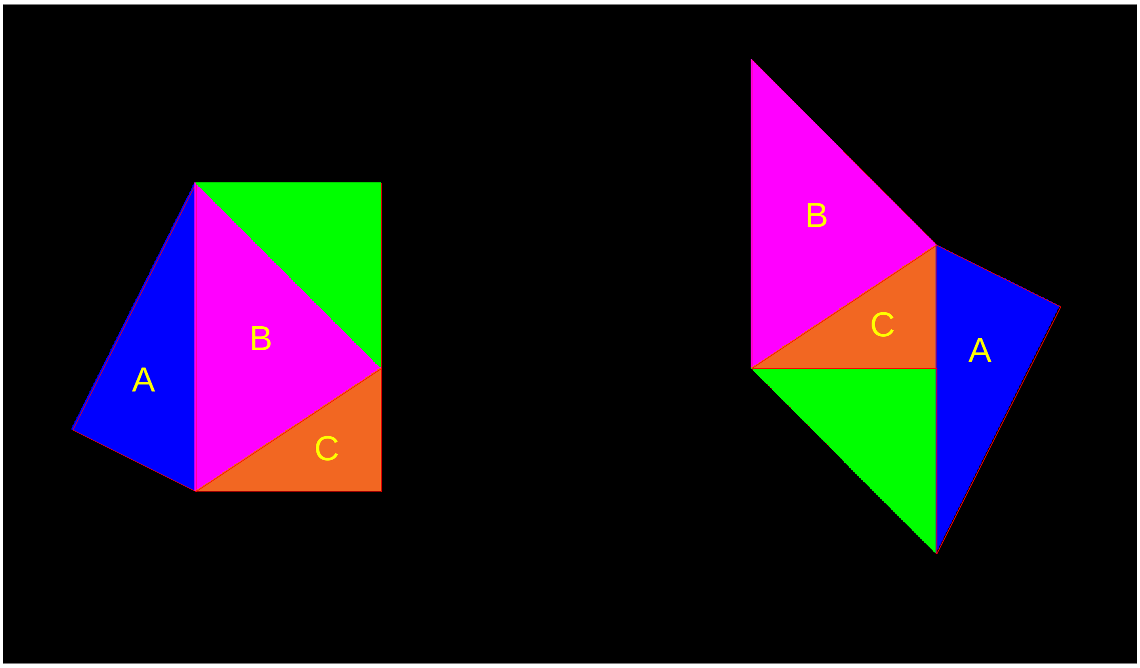

Figura 5.11 – Figuras equicompuestas.

5.2 – Proporcionalidad, Igualdad y Semejanza

El concepto de homotecia nos permite establecer una serie de relaciones interesantes entre figuras originales y transformadas.

5.2.1 – Proporcionalidad

El primer concepto interesante es el de proporción. Aunque ya hemos hablado con anterioridad de él, es ahora donde podemos ver su relación con la homotecia.

Razón

Denominamos **razón entre dos segmentos**, a y b, al valor de la relación entre las longitudes de ambos segmentos.

$$K = a/b$$

A los segmentos a y b se les llama términos de la razón. Por tanto, este concepto posibilita comparar dos segmentos y saber cuántas veces uno es contenido en el otro. La razón se denota mediante la letra K, exactamente igual que a la razón de una homotecia. Aunque dos segmentos que guardan una razón K no tienen por qué ser necesariamente homotéticos, la razón entre dos segmentos a los que se le aplique una homotecia de razón K, será precisamente K.

Proporción y Proporcionalidad

A partir del concepto de razón, se define el concepto de **proporción**. Se dice que dos parejas de segmentos a, b, y c, d guardan una misma proporción cuando la razón entre a y b es la misma que la razón entre c y d.

Por tanto, **la proporción es la igualdad entre dos razones**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se llaman términos **medios** a los segmentos b y c. Se llaman términos **extremos** a los segmentos a y d.

La **proporcionalidad** es la relación que se establece entre elementos que son proporcionales. También se dice que la proporcionalidad es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma, pero diferente tamaño.

La proporcionalidad, así definida, es la **proporcionalidad directa**. Se dice que son magnitudes directamente proporcionales aquellas que varían de tal forma que su razón permanece constante. Es decir, cuando una magnitud aumenta, la otra aumenta también para que se mantenga el mismo cociente o razón (se denomina a veces **ratio**) entre ambas.

Dos magnitudes x e y son directamente proporcionales cuando se verifica que:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_i}{y_i} = K$$

donde K es la constante (ratio) de proporcionalidad directa, y x_i e y_i son los diferentes valores que pueden tomar las magnitudes x e y.

También se puede establecer una relación de proporcionalidad basada en el producto de las magnitudes, en lugar de en el cociente de las mismas. Se dice que son magnitudes **inversamente proporcionales** aquellas que varían de tal forma que su producto permanece constante. Es decir, cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye en la misma proporción, para que el producto de ambas permanezca igual.

Dos magnitudes x e y son inversamente proporcionales cuando se verifica que:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \cdots = x_i \cdot y_i = K$$

donde K es la constante de proporcionalidad inversa, y x_i e y_i son los diferentes valores que pueden tomar las magnitudes x e y.

5.2.2 – Igualdad e Identidad

Las transformaciones isométricas generan figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño. Cuando dos figuras cumplen tal cosa, se dice que son **iguales**.

Se dice, además, que dos figuras iguales son **idénticas** cuando coinciden exactamente al superponerlas. Lógicamente, **las figuras idénticas siempre son iguales, pero las figuras iguales no siempre son idénticas**.

La identidad se expresa como $F \equiv F'$, siendo F y F' dos figuras cualesquiera. La igualdad se expresa como $F = F'$.

Dos figuras planas iguales no coinciden exactamente al superponerlas, pero sus lados y sus ángulos son iguales y, además, están dispuestos en el mismo orden (se conserva el orden pero no la orientación de los ángulos).

Es decir, se obtienen figuras idénticas a partir de transformaciones isométricas directas (en el plano: la traslación, el giro y la simetría central), y se obtienen figuras iguales a partir de transformaciones isométricas inversas (en el plano: la simetría axial).

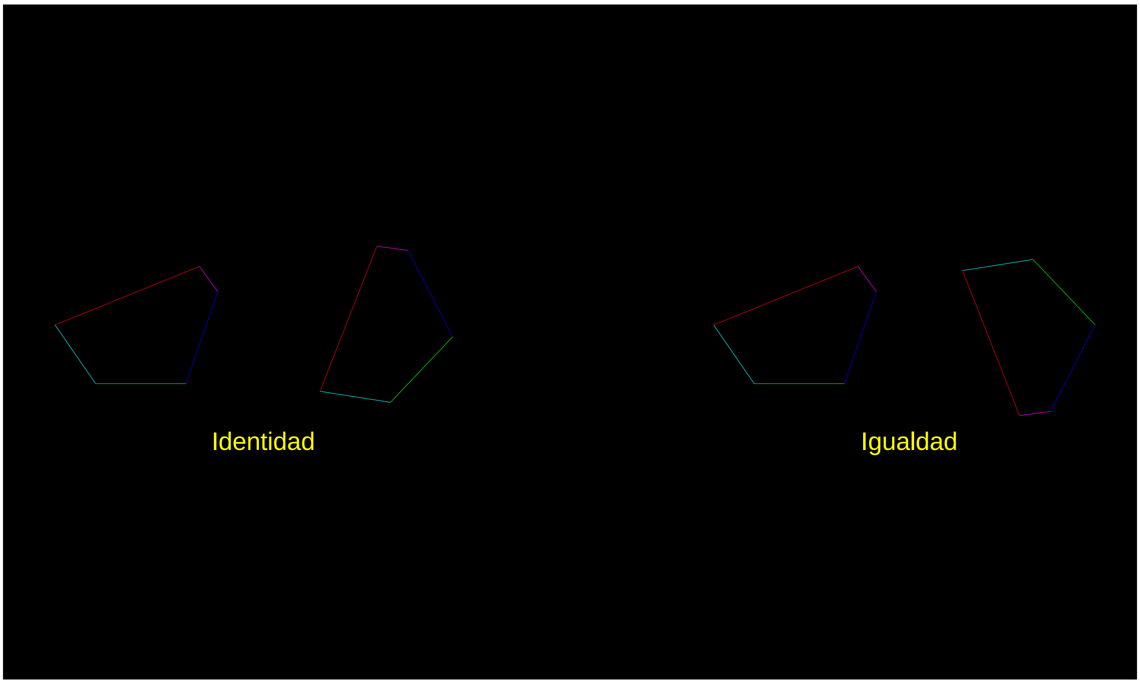

Figura 5.12 – Identidad e igualdad.

5.2.3 – Semejanza Directa y Semejanza Inversa

Las transformaciones isomórficas generan figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño. Cuando dos figuras cumplen tal cosa, se dice que son **semejantes**. Para que dos figuras sean semejantes, las medidas de los segmentos que la forman han de ser proporcionales (siempre con la misma razón de proporcionalidad) y los ángulos que se formen, han de ser congruentes.

Los elementos que se corresponden en una figura original y su semejante se denominan **homólogos**.

Al igual que en la homotecia, se define la razón de semejanza K como la relación de proporcionalidad que existe entre las longitudes de segmentos homólogos.

Si $K > 1$, la figura semejante es de mayor tamaño que la original.

Si $K < 1$, la figura semejante es de menor tamaño que la original.

Si $K = 1$, la figura semejante es de igual tamaño que la original. En este caso, las figuras, además de semejantes, serían iguales.

Se dice, además, que la **semejanza es directa** cuando los ángulos de una figura con respecto a la otra están dispuestos en el mismo orden y sentido rotacional (no se produce inversión de los ángulos y por tanto estamos ante una transformación directa).

Se dice que la **semejanza es inversa** cuando los ángulos están en el mismo orden pero en diferente sentido rotacional (estamos ante una transformación inversa).

A diferencia de la homotecia, la razón K se suele definir como un número positivo, tanto si la semejanza es directa como inversa, aunque es posible definirlos con signo, haciendo que éste indique si la semejanza es directa o inversa.

La semejanza directa es análoga a la identidad, mientras que la semejanza inversa es análoga a la igualdad.

Es importante recalcar que, dos figuras semejantes pueden ser homotéticas si se puede encontrar un punto para establecer una homotecia entre ellas (es decir, ambas figuras están alineadas con relación a un punto). Sin embargo, no todas las figuras semejantes son homotéticas, aunque todas las figuras homotéticas son semejantes. Por tanto, la homotecia es un caso particular de semejanza.

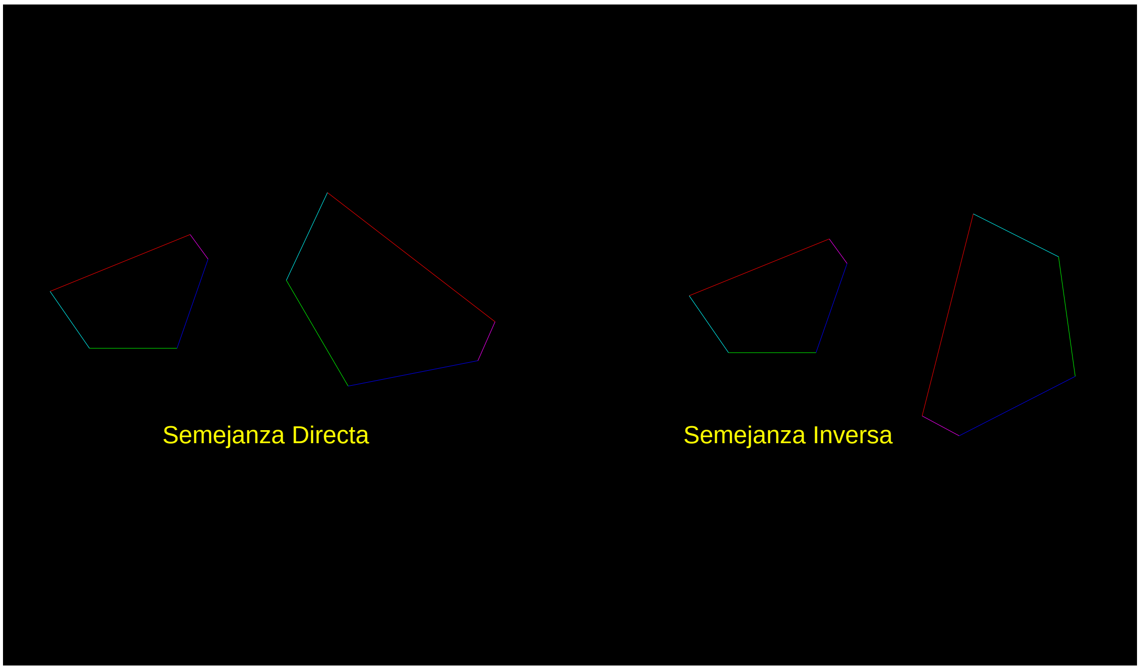

Figura 5.13 – Semejanza directa e inversa.

5.3 – Escalas

A veces, cuando se va a representar un objeto, surgen dificultades derivadas de su tamaño, bien porque es muy grande para dibujarlo en los límites del papel elegido para dibujarlo o imprimirlo, o bien porque es muy pequeño y no se pueden precisar adecuadamente los detalles de su forma.

Las escalas surgen para dar solución a estos problemas que se plantean en la representación gráfica de los objetos.

El concepto de escala proviene del de proporcionalidad y semejanza, ya que dibujar a escala no es más que realizar el dibujo K veces más pequeño (o grande) de lo que es en la realidad.

La escala es la razón que existe entre las dimensiones de un dibujo y las dimensiones que el objeto (que este dibujo representa) tiene en la realidad.

Esta relación puede expresarse en forma de proporción (escala 3:4), en forma de fracción (escala $3/4$), en forma decimal (escala = 0,75), o en forma gráfica, dibujando un segmento de longitud conocida y expresando a que magnitud real corresponde este segmento.

La fórmula fundamental del dibujo a escala es:

$$E = D/R$$

donde E representa la escala, D representa la medida del dibujo y R, la medida de la realidad.

De esta ecuación podemos derivar las siguientes dos relaciones, que nos pueden ser útiles a la hora de interpretar o realizar un dibujo:

$$D = E \cdot R$$
$$R = D/E$$

Es importante recalcar que, aunque se dibuje a escala, cuando se realicen **acotaciones** sobre una figura dibujada (acotar significa poner medidas sobre ella), éstas deben realizarse siempre de manera que **expresen las dimensiones reales del objeto**, por lo que los textos de acotación no deben cambiar aunque cambiemos la escala.

5.3.1 – Tipos de Escalas

Escala natural: es aquella en la que la relación es $1:1$. En ella, las medidas del dibujo son iguales a las de la realidad.

$$E = D/R = 1$$

Cuando se dibuja a escala natural no es necesario realizar ninguna conversión de medidas. Simplemente se han de dibujar los objetos con las mismas medidas que tienen en la realidad.

Escala de reducción: es aquella en la que la relación es $n:m$, siendo $n < m$. En ella, las medidas del dibujo son más pequeñas que las de la realidad.

$$E = D/R < 1$$

Cuando se dibuja con una escala de reducción, se han de dibujar los objetos con una medida menor de la que tienen en la realidad. En concreto se deben dibujar de un tamaño tal que la medida de los objetos en la realidad dividida por la medida de los objetos del dibujo sea exactamente igual a $1/E$.

Muchas veces se expresan las escalas de reducción en la forma $1:m$, como 1:10, o 1:50. Si bien es lo habitual, no es necesario que el primer número sea siempre un 1. Sin embargo, ello facilita la compresión de la escala, puesto que m nos indica que el dibujo se realiza m veces más pequeño de lo que es en la realidad.

La escala de reducción es la más empleada, ya que normalmente se tiende a dibujar objetos que son más grandes que el espacio disponible para dibujarlos.

Escala de ampliación: es aquella en la que la relación es $n:m$, siendo $n > m$. En ella, las medidas del dibujo son más grandes que las de la realidad.

$$E = D/R > 1$$

Cuando se dibuja con una escala de ampiación, se han de dibujar los objetos con una medida mayor de la que tienen en la realidad. En concreto se deben dibujar de un tamaño tal que la medida de los objetos en el dibujo dividida por la medida de los objetos en la realidad sea exactamente igual a E.

Muchas veces, es habitual expresar las escalas de ampliación en la forma $n:1$, como 2:1, o 10:1. Si bien es lo habitual, no es necesario que el segundo número sea siempre un 1. Sin embargo, ello facilita la compresión de la escala, puesto que n nos indica que el dibujo se realiza n veces más grande de lo que es en la realidad.

Las escalas de ampliación son menos comunes, ya que no es tan habitual dibujar objetos tan pequeños como para que no sean apreciables en el espacio disponible para dibujarlos.

5.3.2 – Escalas Gráficas

En muchas ocasiones, cuando se realiza un dibujo escala, lo único que se hace es anotar en una esquina del papel la escala a la que está realizado, con una anotación del tipo $E = 1/100$. Esto es suficiente si el dibujo se imprime o dibuja siempre en el tamaño de papel para el que se escogió la escala.

Sin embargo, hay muchas ocasiones en las que el dibujo será escaneado, reimprimido, fotocopiado, etc., y las nuevas copias no se harán en papeles del mismo tamaño que el original. Ello puede provocar alteraciones en las proporciones del dibujo con respecto a las que se utilizaron en el dibujo original, de tal modo que la anotación de la escala deje de ser cierta porque el cociente entre las medidas reales y las medidas del dibujo deje de ser igual a la escala escogida.

Escala Gráfica

Para evitar que estas alteraciones nos impidan saber a cuánto corresponde una determinada medida del dibujo, se realizan muchas veces "escalas gráficas". Una escala gráfica no es más que un segmento de longitud conocida, el cual se subdivide en una serie de partes iguales (normalmente 10) de modo que se indica debajo de esas marcas a qué medida real se corresponde esa medida en el dibujo. Esto nos permite saber siempre cuál es la relación entre las medidas reales y las medidas del dibujo, incluso aunque cambie el tamaño del papel.

Para construir una escala gráfica se procede de la siguiente manera. Se escoge una medida conocida que quepa de forma holgada en el papel sobre el que se dibuja, y se calcula a cuánto corresponde esa medida en la realidad. Después se divide ese segmento (por Tales) en varias (normalmente diez) partes iguales, y se añaden textos indicando a cuánto corresponde cada marca en la realidad. Cada una de estas partes se denomina unidad de escala.

Podemos, también, añadir una contraescala dibujando una unidad de escala a la izquierda de la marca del 0, y subdividiendo esta unidad la a su vez en diez partes iguales.

Es importante no olvidarse nunca de poner las unidades (centímetros, milímetros, metros) a las magnitudes que indiquemos, porque si no, la escala gráfica no será válida.

Como ejemplo, supongamos que queremos hacer una escala gráfica de la escala 1:50, sobre una hoja A4. En este caso, al ser la escala 1:50, la relación es:

$$E = \frac{D}{R} = \frac{1}{50} = 0{,}02 = \frac{0{,}02\ m}{1\ m} = \frac{0{,}2\ m}{10\ m} = \frac{20\ cm}{10\ m}$$

Como 20 cm es una medida que ocupa una porción significativa de la hoja A4, es una buena medida para realizar la escala gráfica. Por tanto, dibujaremos un segmento de 20 cm, y marcaremos que éste se corresponde con 10 metros en la realidad. Después, dividiremos el segmento en diez partes iguales, que, en este caso, representarán 1 metro cada una. Diremos, por tanto, que la unidad de escala en esta escala gráfica es el metro. La contraescala, en este caso, consistirá en dividir un segmento que representa 1 metro en diez partes iguales. La unidad de contraescala, en este caso, será 1 decímetro.

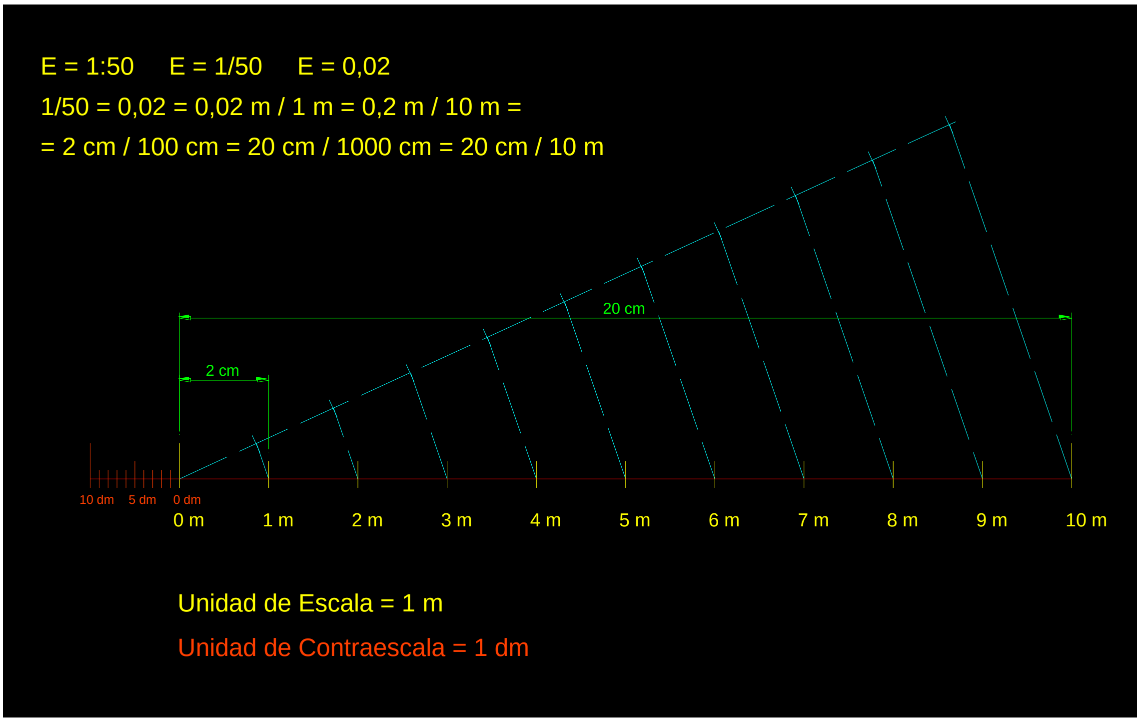

Figura 5.14 – Escala gráfica.

Escala Gráfica Transversal

Este tipo de escala se utiliza cuando es necesario trabajar precisando decimales en la escala gráfica.

El proceso de construcción de la escala transversal consiste en realizar primero una escala gráfica normal con contraescala, como la explicada en el punto anterior. Sobre la contraescala, trazaremos un cuadrado cuyo lado (y base inferior) sea la contraescala. Dividimos los lados superior e izquierdo del cuadrado en diez partes iguales.

Si a la recta sobre la que realizamos la escala gráfica le llamamos r, debemos realizar, por cada una de las marcas del segmento de escala, rectas perpendiculares a la recta r.

Sobre la perpendicular trazada en la última marca, debemos trazar las diez divisiones de la contraescala, y por ellas dibujar rectas paralelas a la recta r. Es decir, rectas paralelas a la escala gráfica.

Por último, uniendo los puntos 1, 2, 3, 4, etc. de la parte superior del cuadrado de la contraescala con los puntos 0, 1, 2, 3, etc. de la parte inferior del cuadrado de la contraescala (es decir, unimos el punto i de arriba con el $(\mathrm{i}-1)$ de abajo), obtendremos una serie de líneas oblicuas que nos darán una serie de puntos de corte con las líneas paralelas a r, que nos servirán para realizar la medición con decimales.

En la siguiente figura podemos apreciar un ejemplo que ayudará a comprender el concepto. El ejemplo está realizado para la escala 1:2500.

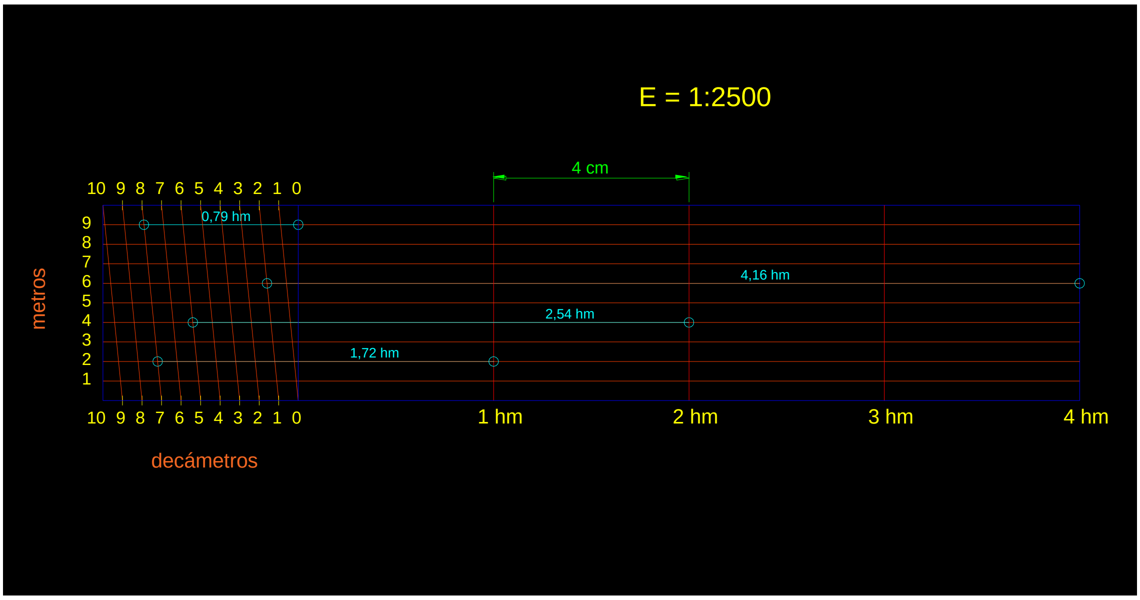

Figura 5.15 – Escala gráfica transversal.

Triángulo Universal de Escalas

El triángulo universal de escalas es un triángulo sobre el que se pueden dibujar una serie de escalas sencillas para ilustrarlas de manera rápida.

La manera más sencilla de realizar el triángulo universal de escalas es realizar un triángulo rectángulo isósceles de medidas conocidas (normalmente múltiplos de 10).

Para realizar un triángulo universal de escalas en una hoja A4, podemos aplicar el siguiente proceso:

Se parte de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos sean de 10 cm. Se dividen éstos en diez partes iguales, y se unen todos los puntos hallados sobre el cateto BC con el punto A. Despúes se trazan paralelas al catero BC por los puntos hallados sobre el cateto AB.

Si nos fijamos en la construcción realizada, se puede observar que en cada paralela se ha formado una escala de reducción diferente, desde la escala 1:10 hasta la 1:1.

Podemos crear también escalas de ampliación prologando las rectas que concurren en A, y trazando más paralelas al cateto BC, separadas por la misma distancia que las anteriores. Veremos que se forman entonces las escalas 11:10, 12:10, 13:10, etc.

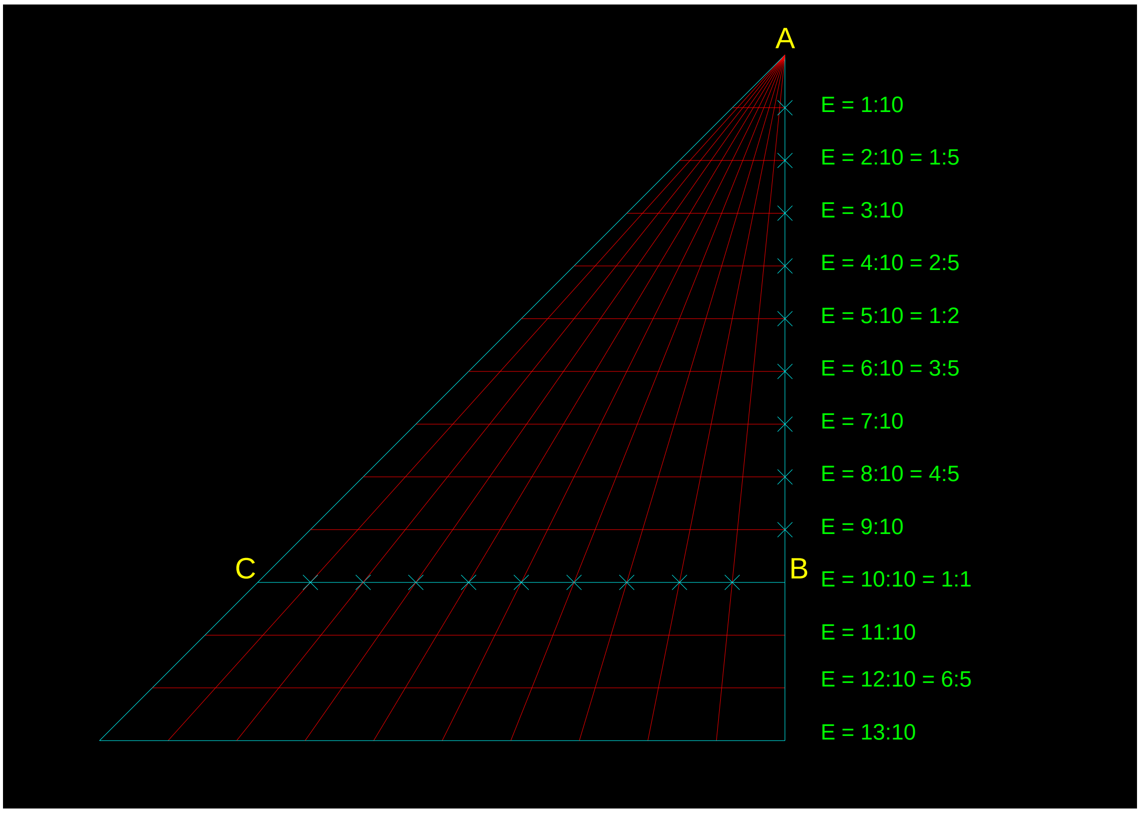

Figura 5.16 – Triángulo universal de escalas.

5.3.3 – Escalas Normalizadas

A la hora de realizar dibujos a escala, lo habitual es emplear escalas fáciles de comprender de forma que el que observe el dibujo se pueda hacer una idea rápida de cómo es el objeto real.

Las diferentes normas de cada país recomiendan una serie de escalas normalizadas. Las escalas suelen depender de la aplicación para las que se utilice, porque la aplicación acaba condicionando el espacio real que se desea representar y por tanto la escala más apropiada que permita realizar dicho dibujo.

La normalización consiste en emplear un 1 en alguno de los dos lados de la expresión $n{:}\,m$. Se intenta, además, emplear siempre escalas con múltiplos de 2, 5 y 10, intentando evitar escalas del tipo 1:7, 1:11, y menos aún escalas del tipo 3:13, 7:17, o 2:19.

Las escalas más habitualmente empleadas en diferentes áreas de aplicación son:

Escalas de Reducción				Escalas de Ampliación
Fabricación	**Construcción**	**Topografía y Cartografía**	**Urbanismo**	
1:2,5	1:5	1:100	1:500	2:1
1:5	1:10	1:200	1:2000	5:1
1:10	1:20	1:500	1:5000	10:1
1:20	1:50	1:1000	1:25000	20:1
1:50	1:100	1:2000	1:50000	50:1
1:100	1:200	1:5000		100:1
1:200	1:500	1:10000		
	1:1000	1:25000		
		1:50000		

Tabla 5.1 – Algunas escalas habituales.