## 2.1. Interpolar el valor d'una funció polinòmica desconeguda que passe per un conjunt de punts:

## Objectius:

1. Demostrar l'existència i unicitat del **polinomi interpolador** de grau menor o igual que **m** que passa per **m+1** punts d'abcises distintes.
2. Trobar una fórmula que ens done directament l'expressió del polinomi interpolador.
3. Trobar un mètode per a obtenir successivament punts interpolats a mesura que introduïm nous punts per a interpolar.
4. Trobar un mètode que ens done successius termes del polinomi interpolador.
5. Entendre els problemes de **fiabilitat** de la interpolació, especialment si es realitza fora de l'interval en el qual es tenen dades (extrapolació) o s'utilitzen polinomis d'un grau elevat.

**Activitat 2.2.** Tenint en compte la condició necessària i suficient perquè un sistema d'equacions lineals siga determinat, el valor del *determinant de Vandermonde*,
<u>Teorema -2.1:</u> $|x_k^i| = \prod_{k>i} (x_k - x_i)$
i la
<u>Definició 2.1:</u> direm que $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ és **un polinomi interpolador** de grau menor o igual que **m** en els punts
$\{(x_k,f_k) \mathbin{/} k=0,1...m\}$ si i només si, per a tot k=0,1...m, $p(x_k)=f_k$ ,
demostrar el
<u>Teorema 2.1:</u> si per a tot $i \neq k$, $x_i \neq x_k$, llavors existeix un únic polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en els punts $\{(x_k,f_k) \mathbin{/} k=0,1...m\}$ .

**Activitat 2.3.** Tenint en compte que
$\sum_{i=0}^{m} \Xi_i = \Xi_k + \sum_{i\neq k} \Xi_i$ per a tot k=0,1...m, i que
$\prod_{j\neq i} \Xi_{kj} = \Xi_{kk} \cdot \prod_{j\neq i \,\&\, j\neq k} \Xi_{kj}$ per a tot $i \neq k$.
demostrar el
<u>Teorema 2.2:</u> si per a tot $i \neq k$, $x_i \neq x_k$, llavors $p(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i \dfrac{\prod_{j\neq i} (x - x_j)}{\prod_{j\neq i} (x_i - x_j)}$
és el polinomi interpolador de $\{(x_k,f_k) \mathbin{/} k=0,1...m\}$ (**mètode de Lagrange**).

**Activitat 2.4.**
<u>Problema 2.1:</u> donats els punts

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_{k.}$ | 1. | 2. | 4. | 5. |
| $f_k$ | 0. | 2. | 12. | 21. |

obtenir pel mètode de Lagrange la seua interpolació per a x=3.
(suggeriment: a l'aplicar la fórmula, escriure primer cada denominador per a evitar errors)

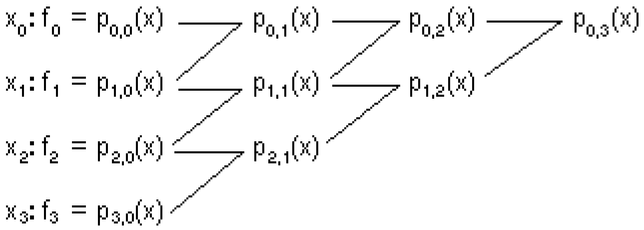
**Activitat 2.5.** Demostrar el

Teorema 2.3: si per a tot i,j=0,1...m, si $i\neq k$, llavors $x_i \neq x_k$,
& si $i+j\leq m$ , llavors $p_{i,j}$ és el polinomi interpolador de grau menor o igual que j en $\{(x_k,f_k) / k=i,i+1...i+j\}$,
llavors per a tot j=1...m, i=0,1...m-j,

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x_{i+j}-x)p_{i,j}-1 + (x-x_i)p_{i+1,j-1.}}{x_{i+j} - x_i}$$

(suggeriment: comprovar que $p_{i,j}(x_i)=f_i$ & $p_{i,j}(x_{i+j})=f_{i+j}$ & per a tot k=i+1...i+j-1, $p_{i,j}(x_k)=f_k$ ).

**Activitat 2.6.** Tenint en compte que, amb els $p_{i,j}$ definits en el Teorema 22,
Teorema 2.4: per a tot i=0,1...m & per a tot $x\in R$, $p_{i,0}(x) = f_i$
i
Teorema 2.5: $p_{0,m}$ és el polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ ,
utililizar l'algorisme




(**mètode de Neville**)

per a resoldre el
Problema 2.2: donats els punts

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1. | 2. | 4. |
| $f_k$ | 0. | 2. | 12. |

obtenir pel mètode de Neville la seua interpolació per a x=3 .
Afegir a continuació el punt $(x_3, f_3) = (5, 21)$ i obtenir la nova interpolació per a x=3 .
Comparar el resultat obtingut amb el del problema 10.

**Activitat 2.7.** D'acord amb la

Definició 2.2: amb $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ tal que per a tot i,j=0,1...m, si $i\neq k$, llavors $x_i\neq x_k$,
definirem les **diferències dividides** $f[x_i,x_{i+1},...x_j]$ mitjançant

$f[x_i] = f_i$ per a tot i=0,1...m

$$f[x_i,x_{i+1},x_j] = \frac{f[x_{i+1},...x_j] - f[x_i,...x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$ per a tot i=0,1...m-1 , j=i+1,...m

i calculant-les amb l'algorisme

$\mathbf{f[x_0]}$ > $\mathbf{f[x_0,x_1]}$ > $\mathbf{f[x_0,x_1,x_2]}$ > $\mathbf{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$
$f[x_1]$ > $f[x_1,x_2]$ > $f[x_1,x_2,x_3]$
$f[x_2]$ > $f[x_2,x_3]$
$f[x_3]$

Problema 2.3: comprovar a partir dels punts

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| k. | 0. | 1. | 2. | 3. |
| $x_k$ | 1. | 2. | 4. | 5. |
| $f_k$ | 0. | 2. | 12. | 21. |

i comparant amb els resultats obtinguts pel mètode de Neville que, per a m=0,1,2,3,
$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{f[x_0,\ldots x_j]} \prod_{i=0}^{j-1} (x-x_i)$
és el polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1\ldots m\}$
(**mètode de Newton**)

**Activitat 2.8.** Assumint que l'error de la interpolació polinòmica de grau menor o igual que **m** ve donada per
Teorema -2.2: $f(x)-p_m(x) = [f^{(m+1)}(\xi(x))/(m+1)!] \prod_{i=0}^{m} (x-x_i)$ tal que $\xi(x)\in[a,b]$ tal que per a tot i=0,1...m, $x_i\in[a,b]$
Problema 2.4: fitar el valor de f(3) suposant que

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 1. | 2. | 4. | 5. |
| $f(x_k)$ | 0. | 2. | 12. | 21. |

i que la quarta derivada de la funció f(x) en l'interval [1,5] està entre 1 i 2 .