2.2. Aproximar la integració d'una funció, acotant l'error d'aproximació:

Objectius:

1. Obtenir uns pesos W_k independents de la funció f(x) tals que sumant el seu producte pels corresponents valors de la funció en determinats nodes x_k, $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$, proporcione la integral exacta per a polinomis fins a un cert grau, i una bona aproximació per a altres funcions.
2. Aprendre a fitar l'error d'aquesta aproximació expressant-lo com el producte d'un factor C independent de la funció f(x) per la derivada d'un cert ordre **r** de la funció en algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b] , $Cf^{(r)}(\xi)$.
3. Estudiar el cas de nodes equidistants, $x_k=a+kh$ (Fórmula de Newton-Cotes).
4. Aprendre a millorar l'aproximació augmentant el nombre de nodes.

Metodologia específica:

- Utilitzar el mètode de coeficients indeterminats per a obtenir tant els pesos W_k d'integració com el factor C de l'error, a partir de la integral exacta de potències simples i resolent en grups menuts els corresponents sistemes d'equacions per a exposar públicament a continuació els resultats obtinguts.

Activitat 2.9. Tenint en compte la
Definició 2.3: sent f:[a,b]→R una funció integrable, cridarem **integral numèrica polinòmica** de **f** en els nodes x_k tals que $a\leq x_0<...<x_m\leq b$ a la integral en l'interval [a,b] del polinomi interpolador de grau menor o igual que **m** en els punts $\{(x_k,f(x_k))\}_{k=0,1...m}$
i utilitzant l'expressió del polinomi interpolador proporcionada pel mètode de Lagrange, justificar l'existència d'uns pesos W_k independents de la funció f(x) amb els quals $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$ siga la seua integral numèrica polinòmica.

Activitat 2.10. Tenint en compte que una integral numèrica polinòmica en **m+1** nodes és igual a la integral exacta per a polinomis de grau menor o igual que **m**, trobar un sistema d'equacions per a l'obtenció dels pesos W_k i demostrar que si per a tot $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, aquest sistema d'equacions té solució única.

Activitat 2.11. Tenint en compte el
Teorema -2.3: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'dt$
demostrar el
Teorema 2.6: en el cas de nodes equidistants $x_k=a+kh$, amb k=0,1...m, h=(b-a)/m, demostrar que els pesos per al càlcul de la corresponent integral numèrica polinòmica (pesos de **Newton-Cotes**) tenen la forma $W_k=hW'_k(m)$, on $W'_k(m)$, que són els pesos corresponents al cas h=1, només depenen de **k** i de **m** (però no de **a** i de **b**).
Pot utilitzar-se per a la demostració l'expressió dels pesos W_k obtinguda en l'Activitat 1, aplicant en la corresponent integral el canvi de variable x=a+th .

Activitat 2.12. Obtenir els pesos de Newton-Cotes per a m=2 i l'interval [0,2]. A partir dels mateixos, obtenir la fórmula general (**Fórmula de Simpson**) per a la integral numèrica polinòmica en els nodes {a, a+h, a+2h} = {a, (a+b)/2, b}, S =

Activitat 2.13.
Problema 2.5: aproximar mitjançant la Fórmula de Simpson $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$.

Activitat 2.14. Tenint en compte l'expressió de l'error de la interpolació polinòmica de grau menor o igual que **m** donada pel Teorema -2.2 , així com que

Teorema -2.4: per a tota funció integrable $f:[a,b] \to R$, $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Teorema -2.5: per a tot parell de funcions integrables $f:[a,b] \to R$, $g:[a,b] \to R^+$, existeix $\xi \in [a,b]$ tal que

$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$
demostrar el
Teorema 2.7: el valor absolut de l'error de la integral numèrica polinòmica en m+1 nodes pot fitar-se pel producte de dos factors, un dels quals depèn únicament dels nodes, i l'altre depèn únicament de la derivada d'ordre m+1 en algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b].

Activitat 2.15. Suposant que l'error d'un mètode d'integració aproximada siga de la forma

$$\varepsilon = C \cdot f^{(r)}(\xi)$$

per a algun punt ξ de l'interval d'integració [a,b], deduir com utilitzar la funció $f(x)=x^r$ per a obtenir el valor de C.
NOTA: en cas d'obtenir-se C=0 pot inferir-se que el mètode és exacte per a aquesta funció, i haurà de repetir-se el procés substituint **r** per **r+1** .

Activitat 2.16. Tenint en compte el

Teorema -2.6: per a tot $f \in C^r(R \to R)$, $x \in C^1(R \to R)$, $\frac{d^r f}{dt^r}(x(t)) = (dx/dt)^r \frac{d^r f}{dx^r}(x)$

així com el Teorema -2.3 i el Teorema 2.6, demostrar el
Teorema 2.8: si l'expressió de l'error per a aproximar $\int_0^m f(t)dt$ amb nodes equidistants i h=1 és

$$\varepsilon' = C' \frac{d^r f}{dt^r}(\zeta) \text{ per a algun } \zeta \in [0,m],$$

llavors l'expressió general de l'error per a aproximar $\int_a^b f(x)dx$ amb nodes equidistants i h=(b-a)/m serà

$$\varepsilon = C. \frac{d^r f}{dx^r}(\xi) \text{ per a algun } \xi \in [a,b] \text{ amb } C=h^{r+1} C'$$

Activitat 2.17. Obtenir l'expressió de l'error per a la Fórmula de Simpson per a l'interval [0,2] (amb h=1), i a partir d'ella obtenir l'expressió general de l'error per a la Fórmula de Simpson per a l'interval [a,b] (amb h=(b-a)/2),
$\varepsilon_S =$
Indicar per a quins polinomis serà exacta aquesta fórmula.

Activitat 2.18.
Problema 2.6: fitar l'error de la Fórmula de Simpson aplicada a $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$. Valorar-lo.

Activitat 2.19. Tenint en compte la
Definició 2.4: sent f:[a,b]→R una funció integrable, anomenarem **integral numèrica composta** de grau **m** en els MM+1 nodes $\{a+kh\}_{k=0,1...MM}$, amb h=(b-a)/(mN), a.

$$\sum_{i=0}^{M-1} N_m(i) ,$$

on $N_m(i)$ és la fórmula de Newton-Cotes de grau **m** per a la integració numèrica polinòmica de la funció f(x) en l'interval [a+imh,a+(i+1)mh] ,
demostrar el
Teorema 2.9: per a tota funció integrable f:[a,b]→R , la seua integral numèrica composta de grau 2 en els 2M+1 nodes $\{a+kh\}_{k=0,1...2M}$, amb h=(b-a)/(2M) (**regla de Simpson**), ve donada per

$$[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + ... + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]\ h/3.$$
$$= [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{M-1} 2f(a+2ih) + \sum_{i=0}^{M-1} N4f(s+(2i+1)h)](b-a)/(6M)$$

Activitat 2.20. Tenint en compte el
Teorema -2.7: per a tota funció contínua f:[a,b]→R i tot conjunt de punts $\xi_i \in [a,b]$, i=1...n, existeix $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = nf(\xi)$$

demostrar el
Teorema 2.10: per a tota $f \in C^4([a,b],R)$, l'error de la regla de Simpson per aproximar $\int_a^b f(x)dx$ ve donat per

$$\varepsilon_{RS} = - f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(2880M^4) \text{ per a algun } \xi \in [a,b]$$

Activitat 2.21.
Problema 2.7: quin increment **h** hauríem de prendre per a obtenir una aproximació a $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$ amb un error menor a 0'01 mitjançant la regla de Simpson?

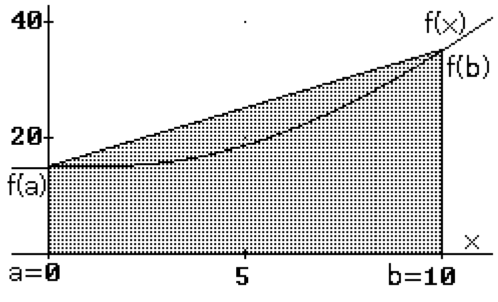
Treball 4 (per a la seua realització en equip)**:**
Obtenir els coeficients W_0, W_1 que fan que

$$W_0 f(a) + W_1 f(b),$$

done el resultat exacte de la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

si f(x) és un polinomi de grau menor o igual que 1 (**Fòrmula del Trapeci** o de Newton-Cotes per a m=1). Obtenir l'expressió de l'error per a qualsevol funció analítica f(x).



Utilitzar-ho per a fitar $\int_0^{10} (225+x^3)^{½}dx$ sabent que |f ''(x)|<0'6 en aquest interval.