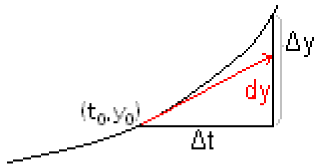
2.3. Obtenir el valor futur d'una variable coneguent el seu valor inicial y la dependència de la seua derivada respecte del temps i la mateixa variable, y'=f(t,y):

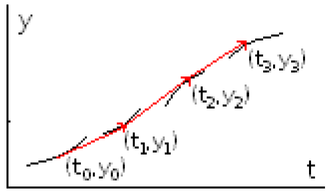
Objectius:

1. Aproximar solucions d'una equació diferencial a partir d'unes condicions inicials substituint l'increment per la diferencial (MÈTODE D'EULER).
2. Obtenir una aproximació de segon ordre a les solucions d'una equació diferencial (MÈTODE DE RUNGE).
3. Generalitzar la Fòrmula de Simpson per a integrar equacions diferencials (MÈTODE DE RUNGE-SIMPSON).
4. Obtenir una aproximació de quart ordre a les solucions d'una equació diferencia (MÈTODE DE KUTTA).

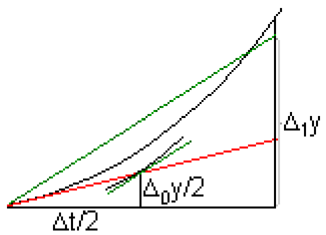


Activitat 2.22. Si coneguem $y'=f(t,y)$ així com la condició inicial $y_0=y(t_0)$, tenint en compte el Teorema -2.8: si y(t) és una funció derivable fins al segon ordre,

$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\Delta t + y''(\xi)\cdot(\Delta t)^2/2$ tal que $\xi\epsilon[t_0, t]$ s'acomplirà $y(t) = y_0 + f(t_0,y_0)\cdot\Delta t + \Theta\cdot(\Delta t)^2$. Així doncs, si substituim $\Delta y=y(t)-y_0$ per $dy=y'\cdot\Delta t=f(t_0,y_0)\cdot\Delta t$ l'error serà proporcional a $(\Delta t)^2$, i si Δt és suficientment xicotet podrem aproximar l'evolució de la variable y aplicant successivament $t_{i+1}=t_i+\Delta t$, $y_{i+1} = y_i + \Delta_0 y$ amb $\Delta_0 y=f(t_i,y_i)\cdot\Delta t$ (**mètode d'Euler**).



Problema 2.8: aplicar el mètode d'Euler per aproximar el valor de y quan t=1 coneguent que y=1 quan t=0 i que $y'=0'1y^2-ty$. Prendre $\Delta t=0'2$ i representar-ho gràficament.



Activitat 2.23. El mètode d'Euler donaria un resultat exacte si la derivada y', representada per la pendent de la corva, fora constant (i per tant la segona derivada valguera zero). Si no és així, trobarem que la derivada en el punt (t_1,y_1) serà $f(t_1,y_1)=f(t_0+\Delta t,y_0+\Delta_0 y)\neq f(t_0,y_0)$. En aquest cas, podem obtenir una millor aproximació si calculem la derivada en el punt intermedi $(t_0+\Delta t/2,y_0+\Delta_0 y/2)$ i prenem $y_1=y_0+\Delta_1 y$ amb $\Delta_1 y=f(t_0+\Delta t/2,y_0+\Delta_0 y/2)\cdot\Delta t$, i així successivament (**mètode de Runge** de segon ordre); en aquest cas l'error és proporcional a $(\Delta t)^3$.

Problema 2.9: aplicar el mètode de Runge de segon ordre per aproximar el valor de y quan t=0'4 coneguent que y=1 quan t=0 i que $y'=0'1y^2-ty$. Prendre $\Delta t=0'2$.

Activitat 2.24. Amb el mètode de Runge de segon ordre hem millorat l'aproximació calculant un nou increment per a la funció y a partir d'un punt auxiliar (en aquest cas, intermedi). Podem obtenir millors aproximacions escollint successivament de forma adequada nous punts auxiliars. En particular, si prenem successivament

$\Delta_I y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_0 y)\cdot\Delta t$

$\Delta_{II} y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_I y)\cdot\Delta t$

obtindrem una aproximació de tercer ordre, amb error proporcional a $(\Delta t)^4$, si prenem $t_1=t_0+\Delta t$, $y_1 = y_0 + \Delta_0 y/6 + 4\cdot\Delta_1 y/6 + \Delta_{II} y/6$ i així successivament (**mètode de Runge-Simpson**).

Comprovar que en el cas particular en que tinguem y'=f(x), aquest mètode és equivalent a la Fòrmula de Simpson.

Activitat 2.25. Podem obtenir una aproximació de quart ordre, amb error proporcional a $(\Delta t)^5$, si prenem

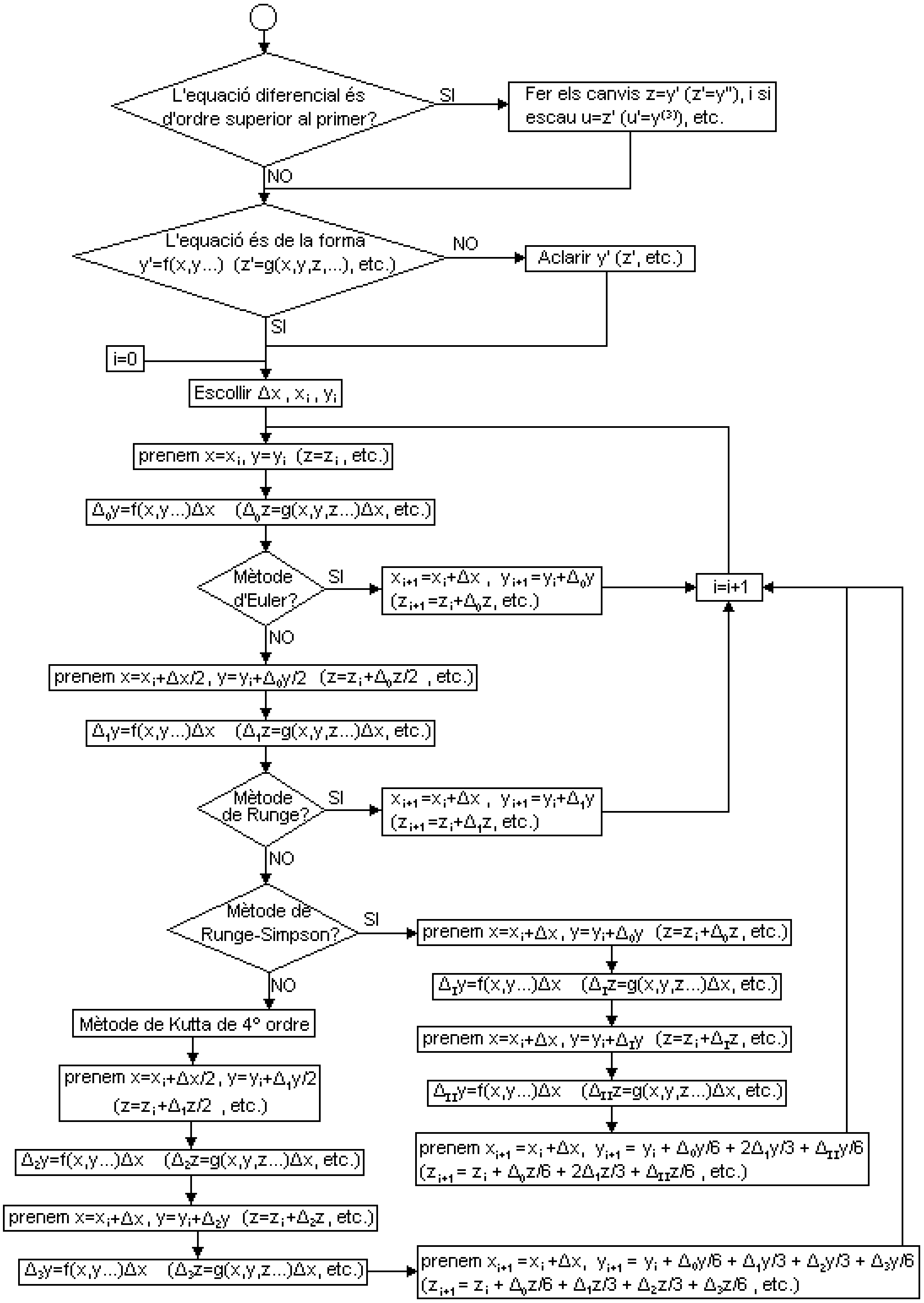
$\Delta_2 y=f(t_0+\Delta t/2, y_0+\Delta_1 y/2)\cdot\Delta t$

$\Delta_3 y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_2 y)\cdot\Delta t$

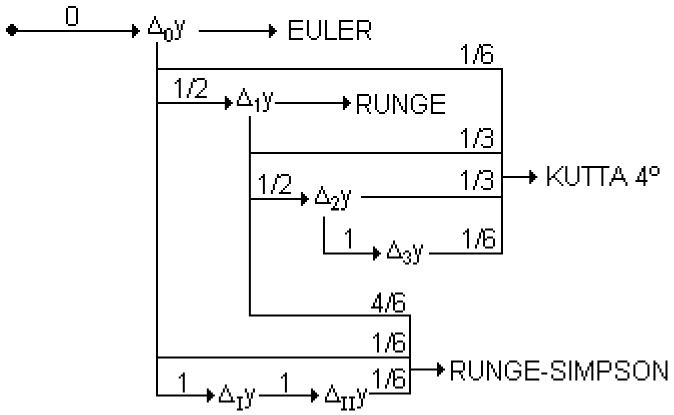
i finalment

$t_1=t_0+\Delta t$, $y_1 = y_0 + \Delta_0 y/6 + \Delta_1 y/3 + \Delta_2 y/3 + \Delta_3 y/6$ i així successivament (**mètode de Kutta** de quart ordre).

Tenim recopilats els diferents mètodes en el següent diagrama de fluxes:



Podem utilitzar també el següent diagrama per tal de recordar a partir de quin increment s'obté un nou increment (amb increment total o amb mig increment) i quins coeficients hem d'utilitzar per obtenir l'increment final:



Per al mètode de Kutta de quart ordre podem realitzar els càlculs en la següent tabla:

t_i y_i	t_0 y_0				$t_1 = t_0+\Delta t$ $y_1 = \Delta_0 y/6 + \Delta_1 y/3 + \Delta_2 y/3 + \Delta_3 y/6$
t y y' $\Delta_0 y$ $\Delta_1 y$ $\Delta_2 y$ $\Delta_3 y$	t_0 y_0 f(t,y) $\Delta_0 y$	$t_0+\Delta t/2$ $y_0+\Delta_0 y/2$ f(t,y) $\Delta_1 y$	$t_0+\Delta t/2$ $y_0+\Delta_1 y/2$ f(t,y) $\Delta_2 y$	$t_0+\Delta t$ $y_0+\Delta_2 y$ f(t,y) $\Delta_3 y$	

Confeccionar tables similars per als altres mètodes.
Naturalment, alhora d'aplicar les tables les expressions es substitueixen per números.
<u>Problema 2.10:</u> aplicar el mètode de Kutta de quart ordre per aproximar el valor de y quan t=0'6 coneguent que y=1 quan t=0 i que $y'=0'1y^2-ty$. Prendre Δt=0'2.